

Universitat Oberta de Catalunya (UOC)

# Tratamiento digital de señales analógicas

Procesamiento digital de señales analógicas de banda limitada, conversiones analógico-digital y digital-analógico, operaciones de cambio de frecuencia de muestreo, y fundamentos básicos del procesamiento por bloques.



## Índice

<b>Introducción.....</b>	<b>5</b>
<b>Objetivos.....</b>	<b>7</b>
<b>1. Motivación del tratamiento digital de señales analógicas.....</b>	<b>8</b>
<b>2. Conversión analógico-digital (A/D) y digital-analógico (D/A).....</b>	<b>10</b>
2.1. Muestreo ideal .....	11
2.2. Interpretación frecuencial del muestreo ideal .....	11
2.2.1. Periodicidad en la representación frecuencial de una señal muestreada .....	12
2.2.2. Frecuencias en tiempo continuo y frecuencias en tiempo discreto .....	13
2.3. Muestreo no ideal .....	16
2.3.1. Muestreo natural ( <i>chopper</i> ) .....	17
2.3.2. Muestreo práctico ( <i>sample &amp; hold</i> ) .....	17
2.4. Teorema del muestreo y conversión D/A .....	18
2.5. Muestreo IF .....	22
2.6. Cuantificación.....	23
<b>3. Operaciones de diezmado e interpolación.....</b>	<b>26</b>
3.1. Diezmado.....	27
3.2. Interpolación .....	29
3.3. Cambio no entero de frecuencia de muestreo .....	30
<b>4. Introducción al filtrado digital .....</b>	<b>32</b>
4.1. Especificaciones de un filtro digital.....	32
4.2. Diseño de filtros FIR .....	35
4.2.1. Método por muestreo en frecuencia .....	36
4.2.2. Método por enventanado .....	36
4.2.3. Método óptimo de rizado constante .....	38
4.3. Diseño de filtros IIR .....	39
4.3.1. Método de la transformación bilineal.....	40
4.4. Comparativa entre filtros FIR e IIR .....	42
<b>5. Implementación del filtrado en bloques.....</b>	<b>43</b>
5.1. Método <i>overlap-save</i> .....	43
5.2. Método <i>overlap-add</i> .....	44
<b>Resumen .....</b>	<b>46</b>
<b>Ejercicios de autoevaluación .....</b>	<b>47</b>
<b>Soluciones.....</b>	<b>51</b>
<b>Bibliografía.....</b>	<b>52</b>



## Introducción

El tratamiento digital de señales analógicas tiene sus raíces a principios de la década de 1980, coincidiendo con el auge de la integración a gran escala de circuitos integrados (VLSI) y el desarrollo de los primeros dispositivos digitales de cálculo. Estos dispositivos constituyeron una revolución al permitir programar en *software* sofisticadas operaciones que hasta aquel momento se llevaban a cabo de forma manual o mecanizada. La programación de dispositivos digitales aportó una gran flexibilidad al permitir modificar de forma sencilla las operaciones que se llevan a cabo, facilitar su repetición y, por tanto, su automatización de forma sistemática. Además, el uso de sistemas digitales aportó en general, una mayor fiabilidad y precisión en comparación con los sistemas analógicos. Finalmente, su bajo coste debido a las economías de gran escala adoptadas en la industria electrónica ha hecho que, hoy en día, los dispositivos digitales estén presentes en la práctica totalidad de los sistemas que nos rodean, tanto a nivel profesional como de consumo.

Dentro de los sistemas digitales, es importante destacar el papel que han jugado los procesadores digitales de señal (DSP). Estos dispositivos están específicamente diseñados para implementar de forma eficiente las operaciones básicas del tratamiento de señales y sistemas lineales, como por ejemplo la convolución. De esta forma, se consigue que operaciones anteriormente llevadas a cabo mediante circuitos analógicos puedan ser implementadas de forma eficiente y fiable mediante DSPs. Para ello, es necesario llevar a cabo tres pasos:

1. Convertir las señales analógicas al dominio discreto en el cual trabajan los dispositivos digitales.
2. Llevar a cabo el tratamiento digital de la señal mediante un sistema en tiempo discreto.
3. Convertir el resultado de nuevo al dominio del tiempo continuo, de forma que se obtenga una señal analógica equivalente a la que se habría obtenido al realizar todo el tratamiento de señal mediante un sistema analógico.

Estos tres pasos forman parte de todo proceso que implique el tratamiento digital de una señal analógica. Su motivación se presenta en la Sección 1, así como las condiciones necesarias para que el resultado sea equivalente al que se hubiera obtenido si la señal se hubiera tratado directamente en el dominio analógico, mediante un sistema analógico.

A continuación, en la Sección 2, se introducen los conceptos de conversión analógico-digital (A/D) y de conversión digital-analógico (D/A). La conversión A/D supone la puerta de entrada al dominio digital y está formada por las operaciones de muestreo y cuantificación, las cuales serán abordadas en detalle en esta sección. Por su parte, la conversión D/A supone la puerta de salida del dominio digital y permite entender cómo se obtiene de nuevo una señal analógica a partir de su versión en tiempo discreto.

Una vez se ha presentado los conceptos fundamentales, el resto del módulo se adentra en aspectos específicos relacionados con el tratamiento digital. El primero de ellos es el cambio de

frecuencia de muestreo de una señal en tiempo discreto, el cual se aborda en la Sección 3. Posteriormente, la Sección 4 presenta cómo implementar un sistema lineal e invariante en tiempo discreto a partir de una serie de especificaciones de su respuesta frecuencial. Ello da lugar al diseño de filtros digitales, cuya implementación eficiente es objeto de estudio en la Sección 5. Este último aspecto comprende un campo muy amplio de estudio para el cual, lejos de dar un tratamiento exhaustivo, el presente módulo pretende dar una visión introductoria que permita al lector adquirir los conocimientos básicos.

## Objetivos

Los objetivos de este módulo son los siguientes:

1. Comprender el interés del tratamiento digital de señales analógicas.
2. Entender la relación entre la respuesta de un sistema en tiempo continuo y su equivalencia en el dominio del tiempo discreto a través del proceso de conversión analógico-digital (A/D), su posterior conversión digital-analógico (D/A), así como las implicaciones y restricciones de cada uno de ellos.
3. Conocer diferentes tipos de muestreo para convertir una señal analógica en una señal en tiempo discreto, desde el muestreo ideal al muestreo práctico.
4. Comprender las implicaciones que tiene el muestreo de una señal en términos de su transformada de Fourier.
5. Aplicar el teorema del muestreo para convertir señales analógicas al tiempo discreto evitando la presencia de *aliasing*.
6. Comprender el proceso de cuantificación de una señal y el papel jugado por diferentes parámetros, como el número de bits y el margen dinámico, en la calidad de la señal resultante.
7. Conocer las operaciones de diezmado e interpolación para llevar a cabo cambios en la frecuencia de muestreo y comprender el impacto que tienen en el dominio frecuencial.
8. Conocer las alternativas para implementar sistemas en tiempo discreto, lineales e invariantes, para una respuesta frecuencial dada.
9. Distinguir los diferentes tipos de filtros FIR en función de la longitud y simetría de su respuesta impulsional.
10. Conocer los parámetros clave a la hora de especificar la respuesta frecuencial de un filtro.
11. Aplicar los métodos básicos de diseño de filtros FIR y filtro IIR, conociendo sus ventajas y sus limitaciones.
12. Conocer los métodos básicos de filtrado en bloque para implementar de forma eficiente la operación de filtrado de señales de duración muy larga con filtros FIR.

## 1. Motivación del tratamiento digital de señales analógicas

Existe multitud de aplicaciones donde es necesario procesar una señal y acondicionarla para que sea almacenada, transmitida o analizada con el fin de extraer cierta información de ella. Éste es el caso del procesamiento de señales de audio, la recepción de señales de comunicaciones o el análisis de señales geofísicas, biomédicas o de sistemas de radar. En todos estos casos es habitual procesar las señales en cuestión a través de un sistema lineal e invariante que típicamente está destinado a reducir el nivel de ruido, eliminar contribuciones indeseadas (*e.g.* interferencias) o seleccionar una cierta componente espectral de la señal recibida (*e.g.* como ocurre en sistemas con acceso múltiple por división de frecuencia). Como se ha descrito en la introducción a este módulo, el tratamiento digital de estas señales ofrece grandes ventajas en términos de flexibilidad, sencillez de implementación, mayor fiabilidad y reducción de costes en comparación con el uso de técnicas y circuitos analógicos.

A nivel conceptual, el tratamiento digital de señales analógicas consta de tres pasos que implican: i) convertir las señales analógicas<sup>1</sup> al dominio en tiempo discreto; ii) llevar a cabo el tratamiento digital de la señal utilizando un sistema en tiempo discreto; iii) convertir el resultado del tratamiento digital de nuevo en una señal analógica, de forma que el resultado extremo a extremo sea equivalente a haber utilizado un sistema analógico. Estos tres pasos se corresponden con los tres bloques que aparecen en la Figura 1. Como puede observarse, el resultado equivalente a todo el proceso es una señal analógica de entrada  $x(t)$  que es procesada y convertida en una señal analógica de salida  $y(t)$ , entendiendo las operaciones intermedias como equivalentes (dentro de una serie de condicionantes) a las que llevaría a cabo un sistema analógico.

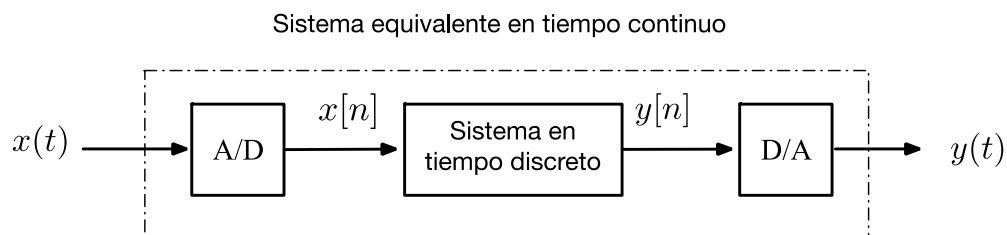


Figura 1. Representación en forma de diagrama de bloques del tratamiento digital de señales analógicas y su equivalencia con un sistema en tiempo continuo.

La importancia de la Figura 1 reside en que una señal analógica de entrada  $x(t)$  es convertida en otra señal analógica de salida  $y(t)$ . Por lo tanto, la respuesta global de entrada/salida puede entenderse como un sistema analógico, independientemente de que algunos de sus bloques intermedios estén implementados en tiempo discreto. De hecho, puede demostrarse que la

---

<sup>1</sup> A lo largo del módulo se utilizará de forma indistinta los términos «señal analógica» y «señal en tiempo continuo». Nótese sin embargo que el término «señal digital» no puede asimilarse con el de «señal en tiempo discreto» puesto que una señal digital es algo más que una mera señal en tiempo discreto. Una señal digital es una señal que además de haber sido discretizada en el dominio del tiempo, ha sido también discretizada en amplitud a través de un cuantificador con un cierto número de niveles.



señal de salida  $y(t)$  viene dada por la convolución de la señal de entrada  $x(t)$  a través de un sistema analógico equivalente  $h_{eq}(t)$ ,

$$Y(\Omega) = H_{eq}(\Omega)X(\Omega) \quad (1)$$

con  $\{X(\Omega), Y(\Omega), H_{eq}(\Omega)\}$  las transformadas de Fourier de las señales  $\{x(t), y(t)\}$  y del sistema equivalente con respuesta impulsional  $h_{eq}(t)$ , respectivamente. Teniendo en cuenta la limitación en banda de  $x(t)$ , la respuesta frecuencial de este sistema equivalente ha de venir dada por,

$$H_{eq}(\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T} & , |\Omega| < \pi/T \\ 0 & , |\Omega| \geq \pi/T \end{cases} \quad (2)$$

donde  $H(e^{j\omega})$  es la respuesta frecuencial del sistema en tiempo discreto que se muestra en la Figura 1. En definitiva, la señal de salida  $y(t)$  puede verse como el resultado de procesar la señal de entrada  $x(t)$  a través de un sistema en tiempo continuo cuya respuesta frecuencial viene dada por (2). Este resultado conecta la respuesta del sistema que se desea en tiempo continuo con la respuesta del sistema que ha de implementarse en tiempo discreto.

La motivación de este módulo es profundizar en los fundamentos del procesamiento digital de señales analógicas. Para ello se hará énfasis en las operaciones básicas de conversión A/D y D/A, las cuales se presentan en la Sección 2, así como en las operaciones de diezmado e interpolación que serán objeto de la Sección 3. Finalmente se introducirá el diseño de filtros digitales en la Sección 4 y la implementación eficiente del filtrado por bloques en la Sección 5.

## 2. Conversión analógico-digital (A/D) y digital-analógico (D/A)

Tal y como se ha mencionado en la sección anterior, la mayoría de los estímulos que encontramos en la naturaleza varían de forma continua en función del tiempo y por lo tanto pueden representarse como señales analógicas. Este es el caso del sonido, la luz o la temperatura. Sin embargo, los dispositivos actuales para el procesamiento de señal y el cálculo computacional son digitales, lo cual significa que trabajan con secuencias de números discretos típicamente binarios. Es por ello que se hace necesario realizar una conversión para que las señales analógicas puedan ser procesadas por sistemas digitales.

Esta conversión es conocida como conversión analógico-digital o conversión A/D, y en realidad implica llevar a cabo tres operaciones que están relacionadas con las características de las popularmente conocidas como señales «digitales». Es decir, señales formadas por secuencias de números discretos, típicamente binarios.

La primera operación que llevar a cabo en el proceso de conversión A/D es la de convertir la señal analógica de entrada, que es una señal en tiempo continuo, en una señal en tiempo discreto. Esta discretización del dominio del tiempo se realiza a través de la operación de *muestreo*, la cual da lugar a una secuencia de números (o muestras) que presentan valores continuos, y que se corresponden idealmente con las amplitudes de la señal analógica de entrada en los instantes de muestreo. La segunda operación que se lleva a cabo en la conversión A/D consiste en discretizar las amplitudes de las muestras para poderlas representar con un conjunto discreto y finito de valores. Esta discretización de las muestras analógicas se conoce como *cuantificación*. Finalmente, la tercera operación a llevar a cabo es la de *codificar* los valores de amplitud cuantificados siguiendo un esquema binario que mapee cada valor de amplitud con un conjunto de  $b$  bits. Es en este punto cuando ya podemos decir que tenemos una señal digital, en el sentido que está discretizada tanto en tiempo como en amplitud, y sus valores están codificados siguiendo un esquema binario.

Una vez la señal digital ha sido procesada, puede que sea necesario volver al dominio analógico. Por ejemplo, una señal de audio grabada en un estudio de grabación. En este caso, la voz de un cantante, o el sonido de una orquesta, es captada por un micrófono y convertida en una señal digital que se graba en un archivo de audio. Este archivo en soporte digital contiene la información correspondiente al audio codificada siguiendo un esquema binario, pero para poderse reproducir y volver a escuchar el sonido, ha de sufrir una conversión digital-analógico (D/A). Esto implica realizar el proceso inverso a la conversión A/D, a excepción de la cuantificación, que es una operación no lineal con pérdidas y, por tanto, no invertible. Para simplificar el análisis, es habitual obviar el efecto de la cuantificación suponiendo que el número de bits que se utilizan para cuantificar cada muestra es suficientemente grande como para asumir que las pérdidas de cuantificación son despreciables. En este capítulo seguiremos esta estrategia para centrarnos puramente en el proceso de conversión de tiempo continuo a tiempo discreto y viceversa.

## 2.1. Muestreo ideal

El proceso de muestreo consiste en tomar muestras de una señal analógica  $x(t)$  cada cierto tiempo, dando lugar a una secuencia de valores en tiempo discreto. Habitualmente las muestras se toman de forma uniforme cada  $T_m$  segundos, de acuerdo con una cierta frecuencia de muestreo  $F_m = 1/T_m$  (en Hz o muestras/segundo) o, equivalentemente,  $\Omega_m = 2\pi/T_m$  (en radianes/segundo). Ello da lugar a una señal en tiempo discreto que denotamos como  $x[n]$ :

$$x[n] \doteq x(t)|_{t=nT_m} = x(nT_m) \quad (3)$$

con  $n \in \mathbb{Z}$  la variable de tiempo discreto.

**El muestreo ideal de una señal en tiempo continuo  $x(t)$  puede entenderse como el producto entre la señal  $x(t)$  y un tren de deltas equiespaciadas  $T_m$  segs.** Tanto la señal  $x(t)$  como el tren de deltas son señales en tiempo continuo, con lo cual el resultado del producto es también una señal en tiempo continuo que denotaremos como  $x_m(t)$ . Ésta última viene dada por:

$$\begin{aligned} x_m(t) &= x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_m) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_m) \delta(t - nT_m) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta(t - nT_m). \end{aligned} \quad (4)$$

## 2.2. Interpretación frecuencial del muestreo ideal

Desde el punto de vista del dominio frecuencial, hay dos aspectos fundamentales a la hora de analizar las consecuencias que conlleva muestrear una señal en tiempo continuo:

- 1) El primero de ellos está relacionado con la interpretación del proceso de muestreo como producto entre la señal de interés en tiempo continuo con un tren de deltas también en tiempo continuo. El resultado hace que **la transformada de Fourier de la señal muestreada sea periódica en el dominio de la frecuencia.**
- 2) El segundo aspecto está relacionado con el escalado que aparece en el dominio de la frecuencia tras la operación de muestreo. Este escalado da lugar a **la distinción entre las frecuencias en tiempo continuo y las frecuencias en tiempo discreto.**

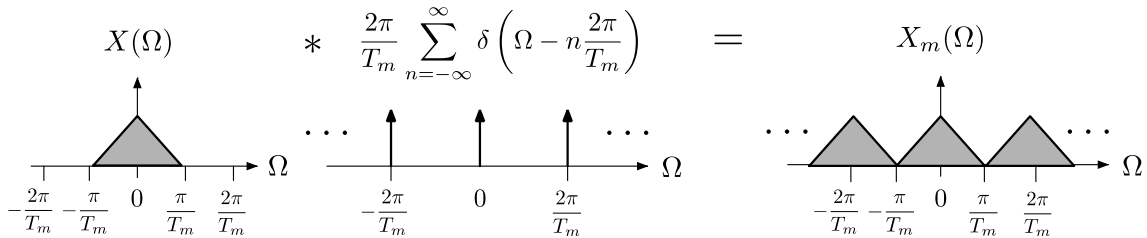
Ambos aspectos se describen con más detalle a continuación.

### 2.2.1. Periodicidad en la representación frecuencial de una señal muestreada

Comencemos por el primer aspecto relacionado con la interpretación del muestreo como producto con un tren de deltas, según se indica en (4). En este caso podemos aplicar la transformada de Fourier directamente sobre la expresión en (4), de forma que obtenemos la siguiente representación frecuencial:

$$\begin{aligned} X_m(\Omega) &\doteq \mathcal{F}[x_m(t)] = \frac{1}{2\pi} X(\Omega) * \frac{2\pi}{T_m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - n \frac{2\pi}{T_m}\right) \\ &= \frac{1}{T_m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\Omega - n \frac{2\pi}{T_m}\right). \end{aligned} \quad (5)$$

Es decir, en la representación frecuencial de la señal muestreada  $x_m(t)$  aparecen **réplicas periódicas de la transformada de Fourier de la señal original,  $X(\Omega)$** . Dichas réplicas aparecen **centradas a frecuencias que son múltiplos de la frecuencia de muestreo  $\Omega_m = 2\pi/T_m$** . Esta situación se muestra en la Figura 2:



**Figura 2. Interpretación frecuencial de la operación de muestreo ideal como producto en el dominio del tiempo entre la señal de interés y un tren de deltas equiespaciadas el tiempo de muestreo. En el dominio de la frecuencia, ello da lugar a la convolución entre la transformada de Fourier de la señal de interés y la transformada de Fourier del tren de deltas, que, aplicando la fórmula de Poisson, se corresponde con otro tren de deltas en frecuencia. El resultado da lugar a una señal muestreada cuya transformada de Fourier es periódica con periodo la frecuencia de muestreo  $\Omega_m = \frac{2\pi}{T_m} = 2\pi F_m$ .**

En esta figura puede observarse cómo a partir de una señal en tiempo continuo  $x(t)$  con transformada de Fourier  $X(\Omega)$ , el resultado del muestreo ideal da lugar a la convolución de  $X(\Omega)$  con un tren de deltas en frecuencia equiespaciadas una distancia  $\Omega_m = 2\pi/T_m$ . Ello hace que la transformada de Fourier de la señal muestreada resultante,  $X_m(\Omega)$ , presente réplicas de  $X(\Omega)$  a frecuencias múltiplos de  $\Omega_m$ . Este efecto es dual al ya conocido para la transformada de Fourier de señales periódicas, donde se conoce que el resultado de una periodicidad en el dominio del tiempo da lugar a una transformada de Fourier que es discreta en el dominio frecuencia. Por ejemplo, para una señal periódica en tiempo como una señal senoidal, su transformada de Fourier es discreta y está formada por dos deltas. En el caso que nos ocupa (*i.e.* el muestreo ideal), estamos en la situación contraria. Tenemos una señal discreta en el dominio del tiempo que, por el hecho de ser discreta, dará lugar a una transformada de Fourier periódica en el dominio de la frecuencia.

De esta forma podemos afirmar que **la periodicidad en un dominio (sea temporal o frecuencial) lleva asociada consigo el muestreo en el dominio transformado correspondiente.**

A raíz de la periodicidad que aparece en el dominio de la frecuencia cuando el dominio del tiempo es muestreado, surge una observación que es importante tener presente. Nótese que

en la Figura 2, la señal en tiempo continuo de interés es paso bajo y su transformada de Fourier  $X(\Omega)$  tiene un ancho de banda  $W_x = \pi/T_m$ . Este ancho de banda se corresponde exactamente con la mitad de la frecuencia de muestreo,  $\Omega_m/2$ . De esta forma, al convolucionar  $X(\Omega)$  con el tren de deltas en frecuencia, la transformada de Fourier resultante presenta réplicas de  $X(\Omega)$  a frecuencias múltiples de  $\Omega_m$ , cada una de las cuales coincide exactamente con la transformada de Fourier  $X(\Omega)$  original.

Sin embargo, si el ancho de banda de  $X(\Omega)$  hubiera sido mayor a  $\Omega_m/2$ , las réplicas de  $X(\Omega)$  se habrían solapado entre ellas y el resultado sería una señal muestreada cuya transformada de Fourier no presentaría réplicas exactas de la transformada de Fourier original, según puede observarse en la Figura 3. En este caso, observando la transformada de Fourier de la señal muestreada no es posible identificar las réplicas individuales de  $X(\Omega)$ . Este efecto se conoce como *aliasing* (o «solapamiento») y hace que la señal muestreada  $x_m(t)$  presente distorsión y no reproduzca de forma fiel la señal inicial  $x(t)$ .

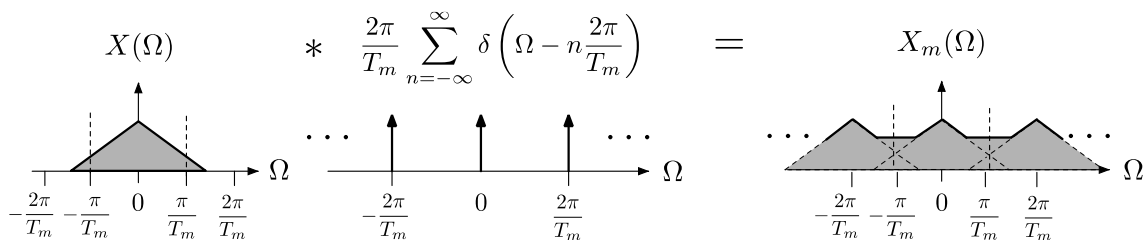


Figura 3. Interpretación frecuencial de la operación de muestreo ideal, en el caso que la señal de interés presente un ancho de banda superior a  $\frac{\Omega_m}{2} = \frac{\pi}{T_m}$ . En ese caso, la transformada de Fourier de la señal muestreada queda afectada por el efecto de *aliasing*.

Por lo tanto, para evitar el efecto de *aliasing* es necesario que la señal analógica de entrada no presente componentes frecuenciales mayores a  $\Omega_m/2$ . Ello se puede conseguir de dos formas:

- 1) La primera es aplicando un filtro paso bajo a la entrada del conversor A/D para asegurar que el ancho de banda de la señal a la salida del filtro no exceda nunca de  $\Omega_m/2$ . Debido a la finalidad que tiene, este filtro es conocido como filtro *anti-aliasing*.
- 2) La segunda forma es asegurar que la frecuencia de muestreo sea siempre superior a dos veces el ancho de banda de la señal de interés, lo cual viene determinado por el teorema del muestreo, que se presentará con más detalle en el apartado 2.4.

En la práctica se suelen implementar ambas opciones de forma simultánea.

### 2.2.2. Frecuencias en tiempo continuo y frecuencias en tiempo discreto

El segundo aspecto a tener en cuenta tras el proceso de muestreo es la nueva definición de frecuencia en tiempo discreto, en contraposición con la frecuencia en tiempo continuo. Para ilustrar este aspecto podemos partir de la transformada de Fourier de la señal muestreada

$x_m(t)$ , según la cual  $X_m(\Omega) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} x_m(t) e^{j\Omega t} dt$ . Sustituyendo  $x_m(t)$  por su expresión en (4) tenemos que,

$$X_m(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{j\Omega T_m n}. \quad (6)$$

El resultado en (6) guarda una estrecha relación con la transformada de Fourier de señales discretas (TFSD), que ya fue introducida en módulos anteriores. De hecho, la TFSD de la secuencia discreta  $x[n]$  viene dada por,

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{j\omega n} \quad (7)$$

Al comparar (6) con (7), se observa que **la transformada de Fourier de la señal muestreada  $x_m(t)$  no es más que la TFSD de la secuencia discreta  $x[n]$  con  $\omega = \Omega T_m$** . Es decir:

$$X_m(\Omega) = X(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T_m}. \quad (8)$$

La relación entre  $X_m(\Omega)$  y  $X(e^{j\omega})$  implica por tanto el siguiente **escalado del eje de frecuencia**:

$$\omega \doteq \Omega T_m = \frac{\Omega}{\Omega_m} \quad (9)$$

o bien:

$$f \doteq \frac{F}{F_m}. \quad (10)$$

Nótese que, a diferencia de la frecuencia en tiempo continuo, **la frecuencia en tiempo discreto  $\{\omega, f\}$  carece de unidades y además su margen de valores está acotado**. Así, mientras la frecuencia en tiempo continuo puede tomar cualquier valor,  $\{\Omega, F\} \in (-\infty, \infty)$ , la frecuencia en tiempo discreto toma valores en el margen  $(-\pi, \pi)$ , o bien  $(0, 2\pi)$ , para el caso de  $\omega$ , así como valores en el margen  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , o bien  $(0, 1)$ , para el caso de  $f$ . Ello es coherente con el margen de valores que toma el argumento de la exponencial compleja en (7). Finalmente es interesante mencionar que la frecuencia  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  se conoce también como frecuencia *normalizada*, ya que sus valores están normalizados a un ciclo de la exponencial en (7).

A continuación, se presentan varios ejemplos que pretenden poner en práctica los conceptos que se acaba de introducir relacionados con la representación en frecuencia de señales en tiempo discreto.

### Ejemplo 1

Considere una señal en tiempo continuo formada por una exponencial compleja  $x(t) = e^{j\Omega_0 t}$  con  $\Omega_0 = 2\pi \cdot 8000$  rad/s, la cual se muestrea de forma ideal utilizando una frecuencia de muestreo de  $\Omega_m = 2\pi \cdot 20000$  rad/s. Determine la frecuencia que presenta la secuencia discreta  $x[n]$  resultante de muestrear la señal  $x(t)$ .

### Solución

A partir de la relación en (3) tenemos que  $x[n] \doteq x(nT_m)$ . Para la señal que plantea este ejemplo, la señal muestreada en tiempo discreto resulta ser  $x[n] = e^{j\Omega_0 T_m n} = e^{j\omega_0 n}$  con la frecuencia en tiempo discreto  $\omega_0 = \Omega_0 T_m = 2\pi \frac{\Omega_0}{\Omega_m} = 2\pi \cdot 0.4$ , o equivalentemente  $f = 0.4$ .

### Ejemplo 2

Considere una señal en tiempo continuo según  $x(t) = \cos(\Omega_0 t)$  con  $\Omega_0 = 2\pi \cdot 8000$  rad/s, la cual se muestrea idealmente utilizando una frecuencia de muestreo de  $\Omega_m = 2\pi \cdot 20000$  rad/s. Determine la representación frecuencial de la señal muestreada en tiempo discreto.

### Solución

Para obtener la representación frecuencial de la señal muestreada en tiempo discreto es recomendable seguir los tres pasos que se indican a continuación. El primer paso consiste en determinar la transformada de Fourier de la señal en tiempo continuo  $x(t)$  que para este ejemplo resulta ser  $X(\Omega) = \pi\delta(\Omega - \Omega_0) + \pi\delta(\Omega + \Omega_0)$  con  $\Omega_0 = 2\pi F_0 = 2\pi 8000$  rad/s. La representación frecuencial  $X(\Omega)$  se muestra en la parte superior de la Figura 4 donde se pueden apreciar las dos deltas correspondientes a la transformada de Fourier de una señal cosenoidal. Nótese que una de las deltas se ha representado con cuerpo blanco para poder identificarla fácilmente cuando posteriormente aparezcan las réplicas periódicas en el dominio de la frecuencia debido al proceso de muestreo. Por claridad, la figura muestra el eje de frecuencias tanto en términos de  $\Omega$  como equivalentemente en términos de  $F$ , siendo esta última notación habitual en aplicaciones prácticas.

El segundo paso consiste en obtener  $X_m(\Omega)$ , la representación frecuencial de la señal muestreada en tiempo continuo,  $x_m(t)$ . Para ello haremos uso de la expresión en (5) donde se indica que  $X_m(\Omega)$  está formada por la superposición de réplicas de la transformada de Fourier de la señal original,  $X(\Omega)$ , centradas a frecuencias múltiples de la frecuencia de muestreo. Esto es, réplicas cada  $\Omega = \pm k\Omega_m = \pm k \frac{2\pi}{T_m}$  para  $k = 0, \dots, \infty$ . El resultado se muestra en la parte central de la Figura 4 donde puede observarse claramente cómo la representación frecuencial  $X_m(\Omega)$  es periódica con periodo precisamente la frecuencia de muestreo,  $\Omega_m$ .

El tercer y último paso consiste en escalar el eje de frecuencias de  $X_m(\Omega)$  para obtener la representación frecuencial de la señal muestreada en tiempo discreto,  $X(e^{j\omega})$ . Para ello haremos uso de la relación indicada en (9) según la cual  $\omega \doteq \Omega T_m$  y por lo tanto la frecuencia de muestreo  $\Omega = \Omega_m$  en tiempo continuo se convierte en la frecuencia  $\omega = 2\pi$  en tiempo discreto. El resultado se muestra en la parte inferior de la Figura 4 donde se puede observar cómo  $X(e^{j\omega})$  es periódica cada  $2\pi$  en  $\omega$  o cada múltiplo entero en  $f$ . Es por ello que, al ser periódica, es suficiente con centrarse únicamente en el margen útil de frecuencias comprendido entre  $(-\pi, \pi)$  o entre  $(-0.5, 0.5)$  en frecuencia normalizada. Este margen de frecuencias aparece resaltado en color amarillo en la parte inferior de la Figura 4 para mayor claridad. Fuera de este margen lo que se observa no es más que la repetición de lo que uno ya ve dentro de él, por lo que no aporta información adicional.

Finalmente, puede observarse que dentro del margen de frecuencias discreto  $(-\pi, \pi)$  o  $(-0.5, 0.5)$  en frecuencia normalizada, la representación frecuencial  $X(e^{j\omega})$  de la señal muestreada en tiempo discreto coincide exactamente con la representación frecuencial  $X(\Omega)$  de la señal original en tiempo continuo. Ello confirma que la frecuencia de muestreo que se ha utilizado preserva la información original que había en el dominio del tiempo continuo.

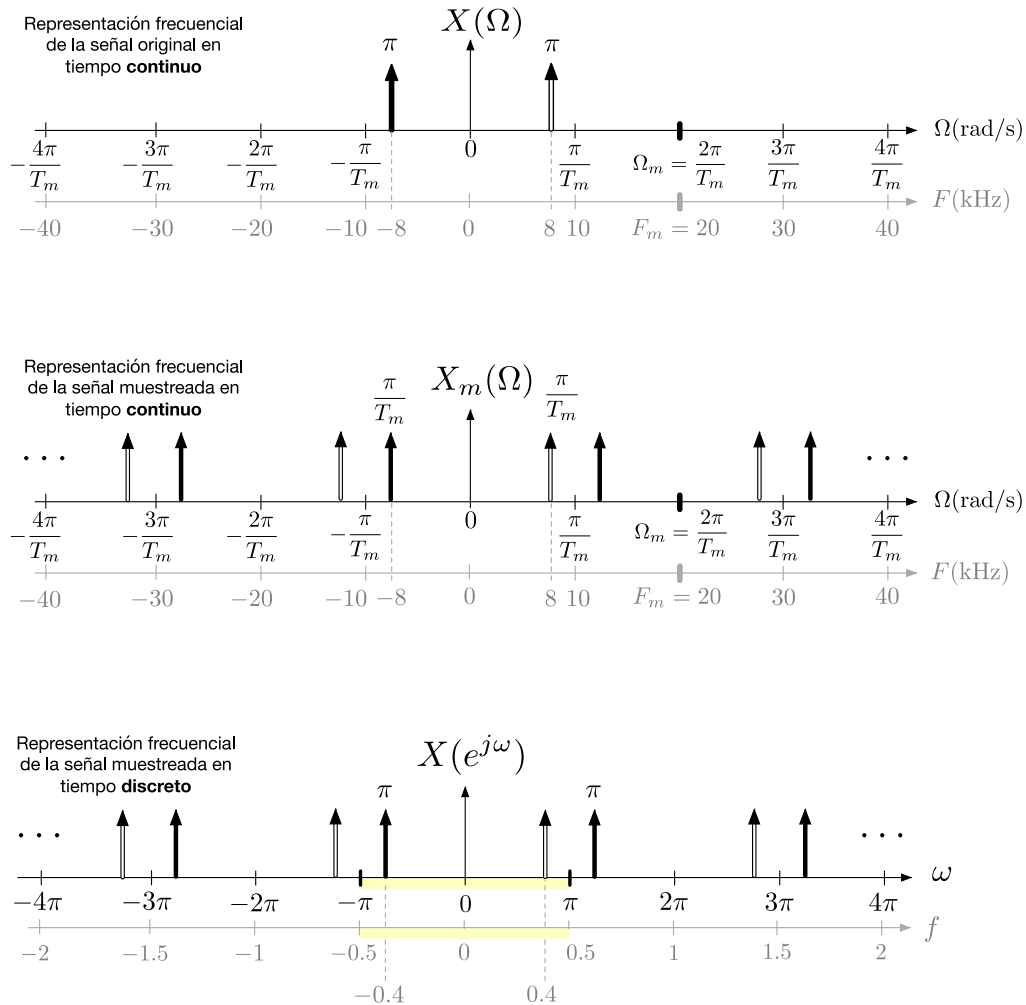


Figura 4. Representación frecuencial de la señal muestreada que plantea el Ejemplo 2.

### 2.3. Muestreo no ideal

El muestreo ideal permite ilustrar de forma sencilla el proceso de muestreo de una señal analógica y las implicaciones que ello tiene en el dominio de la frecuencia. Sin embargo, es difícil tomar muestras de duración infinitesimal como sugiere la interpretación del muestreo como producto de la señal analógica con un tren de deltas. A continuación, se describen dos ejemplos de muestreo no ideal que surgen a la hora de implementar en la práctica el proceso de muestreo. Estos dos ejemplos consisten en el muestreo natural o *chopper* y el muestreo práctico o *sample & hold*.



### 2.3.1. Muestreo natural (*chopper*)

Una alternativa al muestreo ideal consiste trocear (*chopper*) la señal en fragmentos de duración muy pequeña,  $\tau \ll T_m$ , que simulen el resultado de multiplicar la señal de interés por un tren de deltas. En este caso la señal resultante puede expresarse según,

$$\begin{aligned} x_m(t) &= x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t - nT_m}{\tau}\right) \\ &= x(t) \left[ \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_m) \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Aplicando la transformada de Fourier en (11) resulta en la siguiente expresión,

$$\begin{aligned} X_m(\Omega) \doteq \mathcal{F}[x_m(t)] &= \frac{1}{2\pi} X(\Omega) * \left[ \tau \text{sinc}\left(\frac{\tau\Omega}{2\pi}\right) \frac{2\pi}{T_m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - n\frac{2\pi}{T_m}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} X(\Omega) * \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi\tau}{T_m} \text{sinc}\left(\frac{\tau}{T_m}n\right) \delta\left(\Omega - n\frac{2\pi}{T_m}\right) \right] \\ &= \frac{1}{T_m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tau \text{sinc}\left(\frac{\tau}{T_m}n\right) X\left(\Omega - n\frac{2\pi}{T_m}\right). \end{aligned} \quad (12)$$

Si comparamos el resultado del muestreo natural en (12) con el muestreo ideal en (5) podemos ver que las réplicas de la transformada de Fourier  $X(\Omega)$  quedan progresivamente atenuadas según un factor  $\text{sinc}\left(\frac{\tau}{T_m}n\right)$ , según se muestra en la Figura 5.

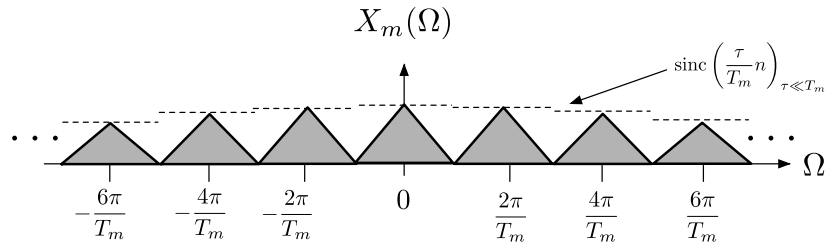


Figura 5. Ilustración de la transformada de Fourier del muestreo natural, donde puede apreciarse una ligera atenuación de las réplicas de  $X(\Omega)$ .

### 2.3.2. Muestreo práctico (*sample & hold*)

El muestreo práctico es el más utilizado y se basa en el uso de un dispositivo que muestrea y mantiene el valor de la señal durante un instante de tiempo que, sin ser infinitesimal como en el caso del muestreo ideal, cumple que  $\tau \ll T_m$ . Este tipo de muestreo vendría a ser la implementación práctica del muestreo ideal, en donde se sustituye la función delta por un interruptor y un condensador que mantiene la muestra a la salida del interruptor durante un tiempo  $\tau$ . La señal muestreada puede expresarse como,

$$x_m(t) = \left[ x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_m) \right] * \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad (13)$$

que en el dominio de la frecuencia resulta,

$$\begin{aligned}
 X_m(\Omega) &\doteq \mathcal{F}[x_m(t)] = \left[ \frac{1}{2\pi} X(\Omega) * \frac{2\pi}{T_m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - n \frac{2\pi}{T_m}\right) \right] \tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\tau\Omega}{2\pi}\right) \\
 &= \left[ \frac{1}{T_m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\Omega - n \frac{2\pi}{T_m}\right) \right] \tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\tau\Omega}{2\pi}\right).
 \end{aligned} \tag{14}$$

El resultado en (14) guarda muchas similitudes con el del muestreo natural en (12). La principal diferencia reside en que el término de atenuación en frecuencia según una función sinc es ahora continuo en función de la frecuencia, y por tanto introduce una ligera distorsión en las réplicas según se observa en la Figura 6. Cabe mencionar, sin embargo, que dicha distorsión es habitualmente despreciable suponiendo que  $\tau \ll T_m$ . En caso de que esto no sea así, entonces es necesario aplicar un filtro ecualizador en el proceso de conversión D/A para revertir esta degradación y preservar la información original de la señal analógica.

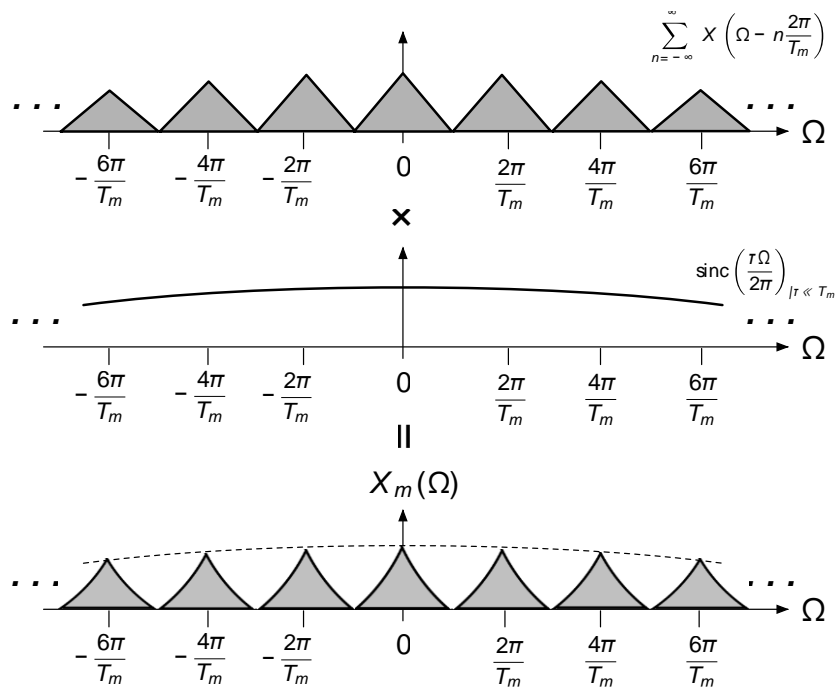


Figura 6. Ilustración de la transformada de Fourier del muestreo práctico, donde puede apreciarse cómo el «hold» de la muestra ocasiona una ligera distorsión en frecuencia que, en caso de no ser despreciable, debe ser compensada mediante un filtro ecualizador en el proceso de conversión D/A.

## 2.4. Teorema del muestreo y conversión D/A

El **teorema del muestreo** (o **teorema de Nyquist**) se basa en una observación que se ha comentado ya en secciones anteriores a propósito de los diferentes esquemas de muestreo. En particular:

El hecho de que una señal muestreada presente una transformada de Fourier periódica con periodo igual a la frecuencia de muestreo provoca que, para evitar el solapamiento de réplicas en el dominio frecuencial, la frecuencia de muestreo ( $\Omega_m, F_m$ ) tenga que cumplir que:

$$\Omega_m \geq 2W_x \quad (15)$$

o equivalentemente:

$$F_m \geq 2B_x \quad (16)$$

allí donde  $W_x$  (en rad/seg), o equivalentemente  $B_x$  (en Hz), es la frecuencia máxima de información de la señal analógica que pretende muestrearse. **Las condiciones en (15) y (16) son conocidas como el criterio de Nyquist.** Su justificación puede comprenderse de forma intuitiva a partir del efecto de *aliasing* que aparece en la Figura 3 cuando se da el caso que dicho criterio no se cumple. **La frecuencia de muestreo mínima  $\Omega_m = 2W_x$  o equivalentemente,  $F_m = 2B_x$ , se conoce también como la frecuencia de Nyquist.**

El teorema de muestreo entendido como tal no hace más que formalizar esta observación intuitiva que acaba de describirse. Es decir, el teorema establece que, **si la frecuencia máxima de información de una señal analógica es  $W_{\max} = W_x$  (o equivalente,  $F_{\max} = B_x$ ), la señal analógica puede recuperarse de forma exacta a partir de la señal muestreada.** Para ello, es necesario que la frecuencia de muestreo utilizada cumpla con el criterio de Nyquist en (15) o (16).

Para realizar esta **conversión digital-analógico (D/A)**, el teorema de muestreo afirma que toda señal analógica puede expresarse como

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_m) h_i(t - nT_m) \quad (17)$$

en donde  $x(nT_m)$  son las muestras de la señal muestreada y  $h_i(t)$  es un **filtro interpolador** cuyas respuestas impulsional y frecuencial vienen dadas respectivamente por,

$$h_i(t) = \text{sinc}\left(\frac{\Omega_m}{2} t\right) \quad \leftrightarrow \quad H_i(\Omega) = T_m \Pi\left(\frac{\Omega}{\Omega_m}\right). \quad (18)$$

Tal y como se puede ver en la parte derecha de (18), la respuesta frecuencial del filtro interpolador es un pulso rectangular de ancho de banda  $\Omega_m/2$ . **La misión de este filtro interpolador es eliminar las réplicas que puedan existir más allá de esta frecuencia de corte para que la señal resultante vuelva a cumplir la condición de Nyquist inicial**, es decir, que su contenido frecuencial esté limitado al margen de frecuencias entre  $(-\Omega_m/2, \Omega_m/2)$ .

La señal analógica en (17) puede verse como la interpolación de las muestras discretas  $x(nT_m)$  utilizando como funciones interpoladoras las versiones desplazadas en tiempo del filtro  $h_i(t)$ .

De esta forma la expresión en (17) es capaz de reconstruir una señal analógica a partir de un conjunto de muestras discretas. En general, esta señal analógica reconstruida puede tener cualquier forma y por tanto la denotaremos según  $x_r(t)$  con transformada de Fourier  $X_r(\Omega)$ . **Cuando las muestras discretas  $x(nT_m)$  se han tomado cumpliendo la condición de Nyquist y además el filtro interpolador es el indicado en (18), entonces se puede afirmar que la señal reconstruida  $x_r(t)$  a partir de las muestras discretas  $x(nT_m)$  coincide exactamente con la señal analógica original  $x(t)$ . Es decir, únicamente en ese caso se puede afirmar que  $x_r(t) = x(t)$  y por tanto que la conversión de tiempo continuo a tiempo discreto y viceversa se lleva a cabo manteniendo íntegra la información contenida en la señal original  $x(t)$ .**

### Ejemplo 3

Considérese la misma señal  $x(t)$  del Ejemplo 2 pero en donde el muestreo ideal se lleva a cabo con una frecuencia de muestreo de  $\Omega_m = 2\pi \cdot 10000$  rad/s. Determínese la representación frecuencial de la señal reconstruida a partir de la señal muestreada, es decir, de la conversión digital/analógico.

### Solución

En este caso tenemos una frecuencia de muestreo  $\Omega_m = 2\pi \cdot 10000$  rad/s que no cumple con el criterio de Nyquist en (15) al ser la señal  $x(t)$  un coseno de frecuencia  $\Omega_m = 2\pi \cdot 8000$  rad/s. Como resultado, la señal muestreada se verá afectada por el efecto de *aliasing* y no será posible recuperar la señal original  $x(t)$  a partir de su versión muestreada. Para comprobarlo vamos a analizar la representación frecuencial de esta señal muestreada.

El primer paso consiste en obtener la representación frecuencial de la señal original  $x(t)$ . Al ser la misma señal que en el Ejemplo 2, su representación frecuencial  $X(\Omega)$  es exactamente la misma que la que aparece en la parte superior de la Figura 4 y que se reproduce a continuación en la parte superior de la Figura 7.

El segundo paso consiste en implementar la operación de diezmado ideal para obtener la señal muestreada  $x_m(t)$  cuya respuesta frecuencial  $X_m(\Omega)$  se muestra en la parte central de la Figura 7. Tal y como ocurría en el Ejemplo 2,  $X_m(\Omega)$  presenta un comportamiento periódico en frecuencia con réplicas de la transformada de Fourier de la señal original,  $X(\Omega)$ , a frecuencias múltiples de la frecuencia de muestreo.

La diferencia con el Ejemplo 2 es que, al incumplir la frecuencia de muestreo con la condición de Nyquist, algunas de estas réplicas invaden la región de frecuencias entre  $(-\frac{\Omega_m}{2}, \frac{\Omega_m}{2})$  donde idealmente debería de encontrarse únicamente la representación frecuencial de la señal original,  $X(\Omega)$ . **En este caso, como se puede observar en la parte central de la Figura 7, en dicha región de  $X_m(\Omega)$  hay también dos deltas como en  $X(\Omega)$ , pero estas no se corresponden con las deltas originales, sino con *alias*.** Ello puede observarse notando que la delta inicialmente en las frecuencias positivas de  $X(\Omega)$  y representada con cuerpo blanco, aparece ahora en las frecuencias negativas de  $X_m(\Omega)$ .

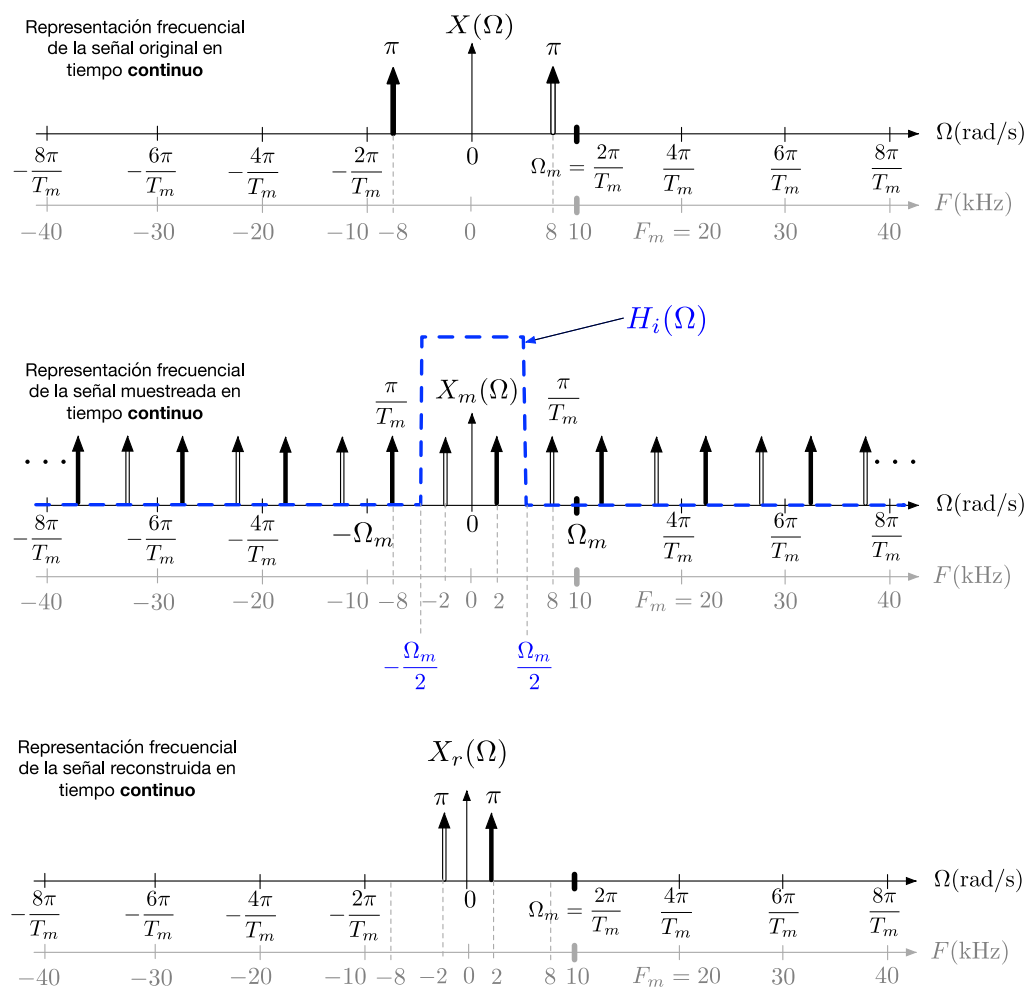


Figura 7. Representación frecuencial de la señal muestreada que plantea el Ejemplo 3.

Por otro lado, es interesante mencionar que si uno observa la frecuencia analógica a la que corresponden estas las deltas que han quedado en la región de frecuencias  $(-\frac{\Omega_m}{2}, \frac{\Omega_m}{2})$  de  $X_m(\Omega)$ , su valor resulta ser de 2 kHz en comparación con los 8 kHz iniciales de  $X(\Omega)$ . Esto indica que **no es posible recuperar la sinusoide inicial de 8 kHz ya que, al haber incumplido la condición de muestreo de Nyquist, las muestras resultantes sólo permiten recuperar una sinusoide de apenas 2 kHz.**

Esta hipótesis se confirma al aplicar el filtro interpolador para recuperar la señal analógica original. El filtro aparece indicado en la parte central de la Figura 7, donde puede verse cómo selecciona únicamente las dos deltas que han quedado dentro de la región de frecuencias  $(-\frac{\Omega_m}{2}, \frac{\Omega_m}{2})$ . La transformada de Fourier de la señal reconstruida de nuevo en el dominio analógico se ha denotado como  $X_r(\Omega)$  en la parte inferior de la Figura 7. Como puede observarse, esta da lugar a una señal en tiempo continuo formada por un coseno de frecuencia 2 kHz en lugar de los 8 kHz iniciales.

Antes de finalizar este apartado es interesante mencionar que, en la práctica, es habitual considerar una frecuencia de muestreo ligeramente superior a la que estrictamente establece el teorema de muestreo. Hay varias razones para ello. Una de ellas es **el muestreo de tonos puros, es decir, señales de tipo seno/cosenoidal**. En ese caso tendríamos, por ejemplo, una señal  $x(t) = \sin(\Omega_0 t)$  con frecuencia cualquiera  $\Omega_0$ . Si tomamos estrictamente el resultado en (15), tenemos que la frecuencia de muestreo sería  $\Omega_m = 2\Omega_0$ . Como consecuencia, en tiempo

discreto obtendríamos las muestras  $x(mT_m) = \sin\left(\Omega_0 \frac{2\pi}{\Omega_m} m\right) = \sin(\pi m)$ . Nótese que, a pesar de cumplir estrictamente con el teorema de muestreo, las muestras que resultan son todas cero, con lo cual la señal en tiempo discreto ha desaparecido por completo. Esto no habría ocurrido si la senoide se hubiera desfasado ligeramente antes de ser muestreada, pasando a ser  $x(t) = \sin(\Omega_0 t + \theta)$  para  $\theta \neq \{0, \pi\}$ . En ese caso, el resultado del muestreo sí habría dado lugar a una senoide en tiempo discreto, lo cual indica que existe una ambigüedad a la hora de recuperar la senoide inicial a pesar de haber muestreado exactamente a la frecuencia de Nyquist. Este ejemplo es en realidad un caso límite de la condición del teorema de Nyquist que requiere que la frecuencia de muestreo sea estrictamente superior a dos veces el ancho de banda de la señal. Esto es,  $\Omega_m > 2\Omega_0$ .

## 2.5. Muestreo IF

Las señales que se transmiten a través de elementos radiantes como antenas o guías de onda suelen ser señales paso banda centradas a una cierta frecuencia portadora. Por ejemplo, el caso de las señales de WiFi que se transmiten en la banda de 2.4 GHz. La expresión general de una señal paso banda cualquiera viene dada por:

$$x(t) = i(t) \cos(\Omega_0 t) - q(t) \sin(\Omega_0 t) \quad (19)$$

en donde  $\Omega_0$  es la frecuencia portadora y las señales  $\{i(t), q(t)\}$  son la componente en fase y componente en cuadratura, respectivamente. La expresión en (19) puede reescribirse de forma equivalente según:

$$x(t) = \text{Re}[(i(t) + jq(t))e^{j\Omega_0 t}] \quad (20)$$

donde queda patente el hecho de que dejando de lado la portadora, la cual no aporta ningún tipo de información, el mensaje está contenido en lo que se conoce como equivalente paso bajo de la señal, el cual viene dado por:

$$b_x(t) = i(t) + jq(t). \quad (21)$$

En el caso general, pues, una vez eliminada la portadora obtenemos una señal que puede ser compleja y que, en el caso de ser muestreada, ha de llevarse a cabo de forma separada en su parte real y en su parte imaginaria. Ello hace que se tenga que implementar dos conversores analógico digital, con el problema que ello conlleva a nivel de que estén perfectamente sincronizados para muestrear ambas componentes en el mismo instante de tiempo.

Una solución a este problema, y que evita además el tener que convertir a banda base para eliminar la portadora, consiste en implementar el conocido como muestreo a frecuencia intermedia (IF) o *IF sampling*. Suponiendo que el ancho de banda del equivalente paso bajo sea de  $B_x$  Hz, la técnica consiste en muestrear directamente la señal paso banda, utilizando una frecuencia de muestreo escogida según la siguiente expresión:

$$F_m = \min_k \left\{ \frac{4F_{IF}}{4k + 1} \right\} \geq 2B_x \quad (22)$$

para una cierta constante  $k \geq 1$ , y en donde como puede observarse, en todo momento la frecuencia de muestreo resultante cumple con el teorema de muestreo. Esto es,  $F_m$  es siempre mayor o igual al doble del ancho de banda de información de la señal de interés. De las posibles frecuencias  $F_m$  que cumplen con la desigualdad en (22), se toma la más pequeña para poder implementar un conversor A/D lo más sencillo posible. Puede comprobarse que utilizando la frecuencia de muestreo IF resultante en (22), una de las réplicas de la transformada de Fourier de la señal queda centrada a una frecuencia de  $F_m/4$ , con lo cual dicha réplica puede ser bajada a banda base de forma muy sencilla multiplicando la salida del conversor A/D por la señal discreta  $e^{-j\pi/2} = (-j)^n$ . En realidad, no es necesario multiplicar ya que las operaciones a llevar a cabo implican únicamente un cambio de signo o un cambio de parte real a parte imaginaria (o viceversa). De esta forma es posible muestrear una señal paso banda de forma eficiente utilizando un único conversor A/D, y sin necesidad de convertir previamente a paso banda.

## 2.6. Cuantificación

Tal y como se ha comentado anteriormente, la operación de conversión A/D conlleva no sólo el muestreo del eje temporal de la señal de entrada, pasando de una señal en tiempo continuo a una secuencia en tiempo discreto, sino también el muestreo de su amplitud. De este modo se pasa de una señal de entrada cuya amplitud varía de forma continua, a una señal *cuantificada* cuyas amplitudes son también discretas. El proceso de cuantificación forma parte inherente de la conversión A/D y supone mapear un margen de amplitudes de entrada a un conjunto discreto de amplitudes de salida. Se trata por tanto de una operación con pérdidas ya que, una vez cuantificada una señal, no es posible volver a recuperar las amplitudes iniciales. Al ser un sistema no lineal, su comportamiento se representa mediante la respuesta de entrada/salida.

En la Figura 8 se muestra un ejemplo de los dos tipos de cuantificadores habituales, los de tipo *mid-rise* y *mid-tread*. Como puede observarse, se define un margen dinámico de valores de entrada comprendidos entre las amplitudes  $[-x_{\max}, +x_{\max}]$ . Para las amplitudes de entrada dentro de ese margen, la salida viene discretizada a un conjunto de valores que depende del número de bits  $b$  que utilice el cuantificador. El número de valores o niveles de cuantificación posibles, denotado según  $L$ , viene dado por:

$$L = 2^b. \quad (23)$$

El ejemplo de la Figura 8 correspondería al caso de  $b = 3$ . Por otro lado, el paso de cuantificación  $\Delta$  proviene de dividir el margen dinámico entre el total de niveles de cuantificación, y se corresponde con:

$$\Delta = \frac{2x_{\max}}{2^b}. \quad (24)$$

Como puede verse en la Figura 8, el cuantificador *mid-rise* se caracteriza por tener tantos niveles de cuantificación positivos como negativos, y por no incluir el nivel cero. El cuantificador *mid-tread*, sin embargo, sí que incluye el cero como posible nivel de cuantificación a costa de eliminar uno de los niveles de cuantificación positivos.

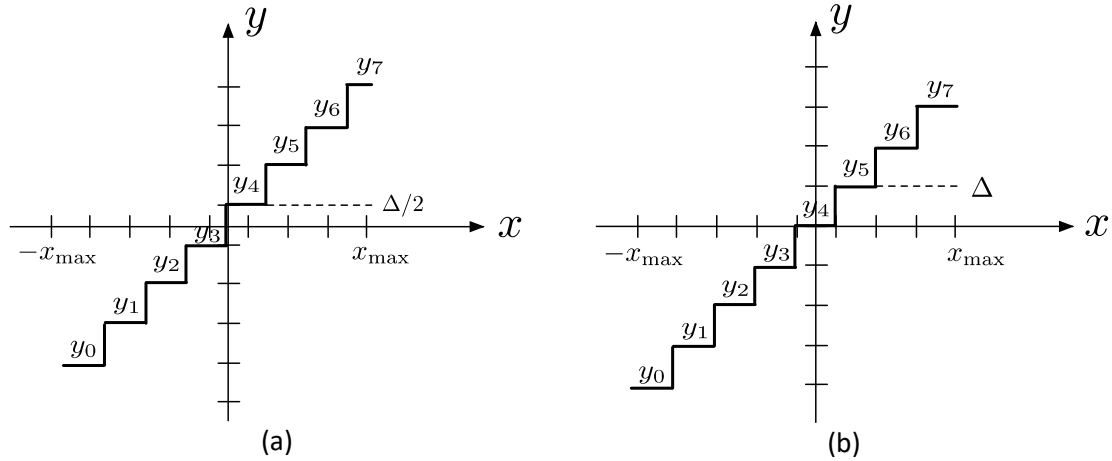


Figura 8. Representación entrada-salida de un cuantificador *mid-rise* (a) y de un cuantificador *mid-tread* (b) para el caso de utilizar  $b = 3$  bits de cuantificación.

De forma matemática, las operaciones de cuantificación que llevan a cabo estos dos tipos de cuantificador pueden representarse como:

$$Q_{\text{mid-rise}}(x) = \frac{\lfloor 2^{b-1}x \rfloor + \frac{1}{2}}{2^{b-1}} \quad (25a)$$

$$Q_{\text{mid-tread}}(x) = \frac{\lfloor 2^{b-1}x + \frac{1}{2} \rfloor}{2^{b-1}} \quad (24b)$$

en donde  $\lfloor \cdot \rfloor$  simboliza la operación de *floor*, o entero inferior más próximo.

Puesto que la cuantificación es una operación con pérdidas, es importante analizar el error que se comete al cuantificar una señal con un cierto número de bits. Se distingue entre dos tipos errores:

- Ruido de sobrecarga,  $e_{sc}$ , el cual ocurre cuando la amplitud de entrada excede el margen dinámico y la salida queda saturada al nivel de cuantificación máximo:

$$\begin{aligned} \text{Si } x \leq -x_{\max} &\Rightarrow e_{sc} = y_0 - x; \\ \text{si } x \geq x_{\max} &\Rightarrow e_{sc} = y_{L-1} - x. \end{aligned} \quad (26)$$

- Ruido granular,  $e_g$ , que es el propiamente debido al hecho de asignar un valor discreto a una amplitud continua, y que depende del paso de cuantificación  $\Delta$ . De esta forma, y en vista de (24), a mayor número de bits, menor ruido granular:

$$\text{Si } -x_{\max} \leq x \leq x_{\max} \Rightarrow |e_g| \leq \frac{\Delta}{2}. \quad (27)$$

En conjunto, el error de cuantificación se mide como la suma de la potencia del ruido de sobrecarga y la potencia del ruido granular, dando lugar a:

$$\sigma_q^2 = \sigma_{e_{sc}}^2 + \sigma_{e_g}^2. \quad (28)$$

De forma analítica, el error de cuantificación puede calcularse a partir de la función densidad de probabilidad  $f_x(x)$ , la cual indica cómo se distribuyen los valores de la señal de entrada. A partir



de  $f_x(x)$  y para un conjunto de  $L$  niveles de cuantificación, el ruido de cuantificación se puede calcular según:

$$\begin{aligned}\sigma_q^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^2 f_e(e) de \\ &= \int_{-\infty}^{-x_{\max}} (y_0 - x)^2 f_x(x) dx + \sum_{k=1}^L \int_{-x_{k-1}}^{x_k} (y_k - x)^2 f_x(x) dx \\ &\quad + \int_{x_{\max}}^{\infty} (y_{L-1} - x)^2 f_x(x) dx.\end{aligned}\quad (29)$$

Para medir la calidad de una señal cuantificada es habitual utilizar la medida de relación potencia de señal a potencia de ruido de cuantificación:

$$\text{SNR}_q = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_q^2}.\quad (30)$$

Para el caso en que el margen dinámico sea suficientemente grande como para que  $\sigma_{e_{sc}}^2 \approx 0$ , y que el ruido granular presente una distribución uniforme (como suele ser habitual), es decir,  $f_{e_g}(e_g) = 1/\Delta$  para  $-\frac{\Delta}{2} \leq e_g \leq \frac{\Delta}{2}$ , entonces la potencia del ruido de cuantificación viene dada por:

$$\sigma_q^2 \approx \sigma_{e_g}^2 = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} e^2 \frac{1}{\Delta} de = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{x_{\max}^2}{3 \cdot 2^{2b}}\quad (31)$$

y la  $\text{SNR}_q$  por:

$$\text{SNR}_q(\text{dB}) = 10 \log_{10} \text{SNR}_q = 4.77 - \log_{10} \left( \frac{x_{\max}}{\sigma_x} \right) + 6b.\quad (32)$$

El resultado en (32) es interesante porque muestra que por cada bit que se añade al cuantificador, la relación señal a ruido de cuantificación mejora en 6 dB. Esta es una observación útil de cara a la implementación de sistemas de adquisición de datos que impliquen una conversión A/D.

### 3. Operaciones de diezmado e interpolación

En ocasiones resulta conveniente cambiar la frecuencia de muestreo a la que fue adquirida una señal, bien sea para reducirla o para incrementarla. Considérese, por ejemplo, una señal en tiempo continuo  $x(t)$  con ancho de banda  $B_x$  que es muestreada a la frecuencia mínima de muestreo  $F_m = 2B_x$ , de acuerdo con el criterio de Nyquist. El resultado es una señal, o secuencia, en tiempo discreto  $x[n]$ . A continuación, dicha secuencia sufre un proceso de filtrado digital dando lugar a una nueva secuencia  $x_f[n]$ , cuyo ancho de banda  $B_f$  es muy inferior al de la señal original  $x[n]$ , por ejemplo  $B_f = B_x/10$ . Se da la circunstancia que la frecuencia de muestreo de la secuencia filtrada  $x_f[n]$  es ahora muy superior a la que podría haber tenido si hubiera sido muestreada desde un inicio en base a su ancho de banda  $B_f$ . En ese caso, la frecuencia mínima de muestreo podría haber sido  $F'_m = 2B_f = B_x/5 = F_m/10$ , diez veces inferior a la frecuencia de muestreo inicial.

La importancia de esta observación radica en que muchas implementaciones *hardware* son sensibles a la frecuencia de muestreo puesto que ésta tiene un impacto importante en términos de consumo de potencia, complejidad de implementación y, por tanto, coste. Es por ello por lo que, ante un ejemplo como el que se acaba de ilustrar, se hace necesario poder hacer un cambio de frecuencia de muestreo para pasar de  $F_m$  a una  $F'_m$  mucho más pequeña a la salida del filtrado digital. Esta operación de reducción de frecuencia de muestreo, en general por un factor  $M$ , se conoce como diezmado.

Una situación como la que acaba de describirse ocurre, por ejemplo, en sistemas de comunicaciones basados en acceso por división de frecuencia (FDMA), donde la estación base necesita demultiplexar cada uno de los usuarios individuales (cuyo ancho de banda es pequeño) a partir de la señal que recibe con todos los usuarios multiplexados en frecuencia (cuyo ancho de banda es grande puesto que depende del número de usuarios).

Por el contrario, existen situaciones donde más que reducir la frecuencia de muestreo, lo que interesa es aumentarla. Siguiendo con el ejemplo de un sistema FDMA, sería el caso de un transmisor que, a partir de las señales en tiempo discreto de cada usuario individual, ha de generar una señal en tiempo discreto de ancho de banda mucho mayor que contenga a todos estos usuarios multiplexados en frecuencia. La operación de aumento de frecuencia de muestreo, en general por un factor  $L$ , se conoce como interpolación.

Ambas operaciones, diezmado e interpolación, son los objetos de estudio a los que está dedicada esta sección.

### 3.1. Diezmado

El diezmado es una operación que reduce la frecuencia a la que ha sido muestreada una señal  $x[n]$ , pasando de:

$$F_m = \frac{1}{T_m} \text{ Hz} \quad \text{o} \quad \Omega_m = \frac{2\pi}{T_m} \text{ rad/seg} \quad (33)$$

a:

$$F'_m = \frac{1}{MT_m} = \frac{1}{T'_m} \text{ Hz} \quad \text{o} \quad \Omega'_m = \frac{2\pi}{MT_m} = \frac{2\pi}{T'_m} \text{ rad/seg} \quad (34)$$

siendo  $T_m$  el tiempo de muestreo inicial y  $T'_m = MT_m$  el tiempo de muestreo final.

Partiendo de la secuencia  $x[n]$ ,

$$x[n] = x(nT_m) \quad (35)$$

el resultado del proceso de diezmado es una nueva secuencia  $x_d[n]$  según,

$$x_d[n] = x[Mn] = x(nMT_m) = x(nT'_m). \quad (36)$$

donde puede observarse que el nuevo tiempo entre muestras de la señal original  $x(t)$  pasa a ser  $T'_m = MT_m$ , lo cual corresponde efectivamente a una reducción de la frecuencia de muestreo por un factor  $M$ .

La operación de diezmado se suele representar en forma de diagrama de bloques según se indica en la figura a continuación, donde el bloque que realiza el cambio de frecuencia de muestreo se conoce como *compresor*.

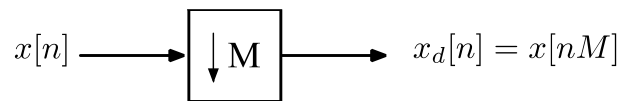


Figura 9. Representación en forma de diagrama de bloques de la operación de diezmado.

A nivel temporal, el diezmado puede entenderse como una operación que genera una nueva secuencia  $x_d[n]$  conservando una de cada  $M$  muestras de la señal original  $x[n]$  y, por tanto, despreciando las  $M - 1$  restantes. Por lo tanto, en el tiempo equivalente a  $M$  muestras de la secuencia original, la secuencia diezmada contiene sólo una muestra, que es precisamente lo que ocurre al utilizar una frecuencia de muestreo  $M$  veces más pequeña.

A nivel frecuencial, la operación de diezmado implica una serie de transformaciones que es interesante analizar con detalle, pues tienen importantes consecuencias en la secuencia de salida. La operación de diezmado se lleva a cabo en dos pasos que implican:

1. Multiplicar la secuencia original  $x[n]$  con un tren de deltas que selecciona una de cada  $M$  muestras. Ello da lugar a una nueva secuencia intermedia  $v[n]$  cuya representación frecuencial se muestra en la Figura 10(b), la cual presenta en réplicas de la transformada de Fourier de la secuencia  $x[n]$  a frecuencias múltiplos de  $2\pi/M$ .
2. Comprimir el eje temporal de la secuencia  $v[n]$  para eliminar las muestras nulas que existen entre las muestras seleccionadas, haciendo por tanto que el tiempo entre muestras no nulas sea  $T'_m = MT_m$ . En el dominio frecuencial, ello implica una expansión del eje de frecuencias que da lugar a la representación mostrada en la Figura 10(c), que se corresponde con la transformada de Fourier de la secuencia diezmada.

Es interesante hacer notar que como resultado del proceso de diezmado, la secuencia resultante  $x_d[n]$  presenta un ancho de banda que, en tiempo discreto, es  $M$  veces mayor que el de la secuencia inicial  $x[n]$ , tal y como se puede observar comparando la Figura 10(a) con la Figura 10(c).

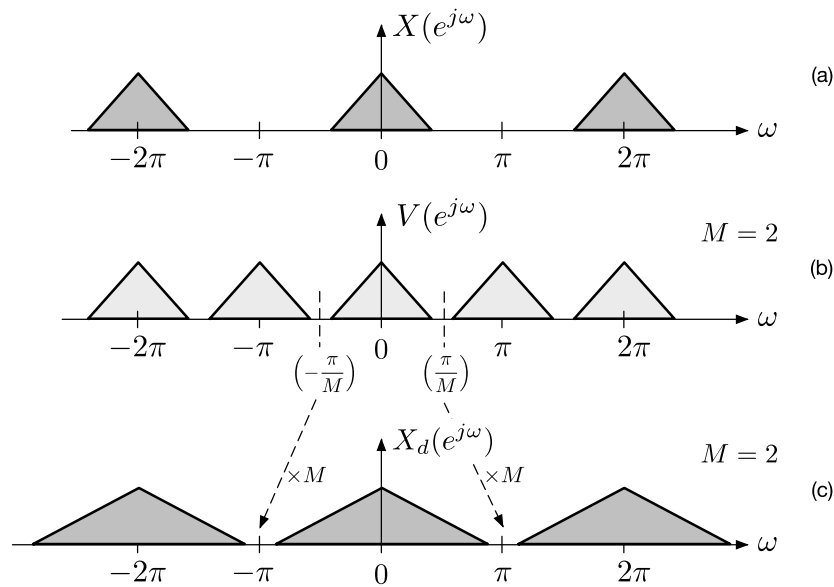


Figura 10. Representación frecuencial de la operación de diezmado.

Por otro lado, hay que tener en cuenta que según se observa en la transformada de Fourier de la secuencia  $v[n]$  (ver Figura 10(b)), la aparición de réplicas a frecuencias múltiplos de  $2\pi/M$  implica que el ancho de banda de la secuencia original  $x[n]$  ha de estar limitado a  $\pi/M$ . De lo contrario aparecerá *aliasing* en la secuencia intermedia  $v[n]$  y, por lo tanto, también en la secuencia diezmada  $x_d[n]$ .

En ciertas aplicaciones puede que la aparición de *aliasing* no sea algo muy crítico. Si no es el caso, entonces habrá que asegurarse que la secuencia original  $x[n]$  se filtre con un filtro paso bajo para asegurar que no hay componentes frecuenciales más allá de la frecuencia discreta  $\omega = \pi/M$ . En términos de la señal analógica  $x(t)$ , esto implica asegurar que no existen componentes frecuenciales más allá de la frecuencia  $F = F_m/2M$  o equivalentemente,  $\Omega = \pi/MT_m$ :

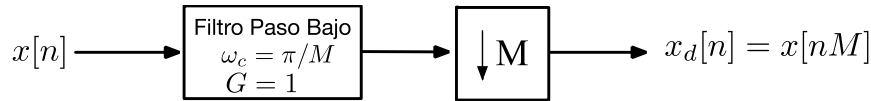


Figura 11. Representación en forma de diagrama de bloques de la operación de diezmado, incluyendo el filtro paso bajo para limitar en banda la secuencia a diezmarse y evitar así el posible *aliasing*.

Finalmente, es importante mencionar que la si bien la operación de diezmado es lineal y estable, no es sin embargo causal ni invariante. Ello ha de ser tenido en cuenta a la hora de analizar sistemas en tiempo discreto que hagan uso de esta operación.

### 3.2. Interpolación

La interpolación es una operación que implica el aumento de la frecuencia a la que ha sido muestreada una señal, pasando de:

$$F_m = \frac{1}{T_m} \text{ Hz} \quad \text{o} \quad \Omega_m = \frac{2\pi}{T_m} \text{ rad/seg} \quad (37)$$

a:

$$F'_m = \frac{L}{T_m} = \frac{1}{T'_m} \text{ Hz} \quad \text{o} \quad \Omega'_m = \frac{2\pi L}{T_m} = \frac{2\pi}{T'_m} \text{ rad/seg} \quad (38)$$

siendo  $T_m$  el tiempo de muestreo inicial y  $T'_m = T_m/L$  el tiempo de muestreo final.

Partiendo de la secuencia,

$$x[n] = x(nT_m) \quad (39)$$

el objetivo es, por tanto, llegar a una nueva secuencia,

$$x_i[n] = x[n/L] = x(nT_m/L) = x(nT'_m). \quad (40)$$

La operación de interpolación se representa en forma de diagrama de bloques según se indica en la figura a continuación:

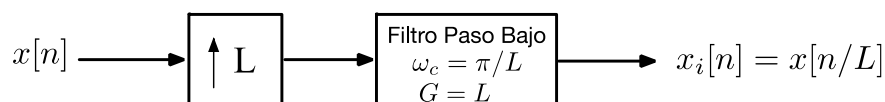


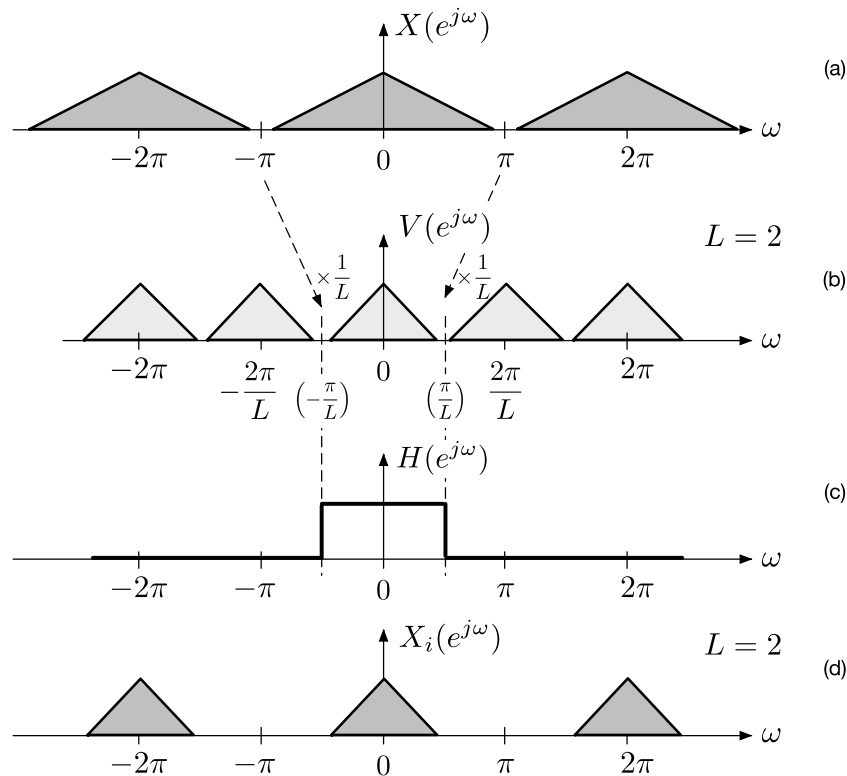
Figura 12. Representación en forma de diagrama de bloques de la operación de interpolación.

A nivel temporal, la nueva secuencia  $x_i[n]$  se genera introduciendo  $L - 1$  nuevas muestras entre cada una de las muestras de la señal inicial  $x[n]$ . El proceso se resume en los siguientes pasos:

1. Se expande el eje temporal introduciendo  $L - 1$  nuevas muestras de valor cero entre cada muestra de la secuencia  $x[n]$ , haciendo que el nuevo tiempo de muestreo sea

$T'_m = T_m/L$ . Este paso es equivalente a generar una secuencia intermedia  $v[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta(n - kL)$  basada en un tren de deltas. En el dominio frecuencial, la transformada de Fourier de esta secuencia intermedia consiste en réplicas de la transformada de Fourier de la secuencia inicial, centradas en frecuencias múltiples de  $2\pi/L$ , tal y como se muestra en la Figura 13(b).

2. Se filtra la secuencia  $v[n]$  con un filtro paso bajo que actúa como filtro interpolador y cuya representación frecuencial se muestra en la Figura 13(c). Este filtrado paso bajo elimina las réplicas para dar lugar a la representación frecuencial de la secuencia interpolada, tal y como se muestra en la Figura 13(d).



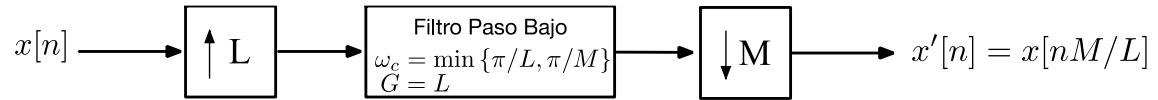
**Figura 13. Representación frecuencial de la operación de interpolación. (Arriba) Señal original, (abajo) señal interpolada con  $L=2$ .**

Es interesante hacer notar que como resultado del proceso de interpolación, la secuencia resultante  $x_i[n]$  presenta un ancho de banda que, en tiempo discreto, es aparentemente  $L$  veces menos que el de la secuencia inicial  $x[n]$ , tal y como se puede observar comparando la Figura 13(a) y (c). Por otro lado, puede demostrarse que la operación de interpolación es lineal y estable, pero su causalidad y estabilidad vendrá dada por el filtro interpolador que se utilice.

### 3.3. Cambio no entero de frecuencia de muestreo

Las operaciones de diezmado e interpolación que se han descrito anteriormente suponen que el factor de cambio de frecuencia de muestreo ( $M$  y  $L$ ) es siempre un número entero. Es posible, sin embargo, llevar a cabo un cambio de frecuencia de muestreo por un factor que no sea entero a partir de combinar en serie ambas operaciones. Ello da lugar a un esquema como el mostrado

en la Figura 14, donde la operación de interpolación viene seguida de la operación de diezmado, dando lugar a un cambio de frecuencia de muestreo por un factor  $L/M$ . Nótese que el filtro paso bajo que se utiliza proviene de combinar los dos filtros que se utilizan en las dos operaciones y por tanto puede implementarse con un único bloque:



**Figura 14.** Representación en forma de diagrama de bloques de la operación de cambio de frecuencia de muestreo por un factor no entero.

## 4. Introducción al filtrado digital

En esta sección se entiende como «filtros» los sistemas lineales e invariantes que procesan una señal de entrada con el objetivo de seleccionar una cierta banda de frecuencias a costa de atenuar o eliminar el resto de frecuencias. Estos sistemas se caracterizan de forma única por su respuesta impulsional  $h(t)$  o equivalentemente, su respuesta en frecuencia  $H(\Omega)$ . La implementación de estos filtros en el dominio del tiempo discreto, dando lugar a los llamados «filtros digitales» con respuesta impulsional  $h[n]$  y respuesta frecuencial  $H(e^{j\omega})$ , resulta en dos familias bien diferenciadas de filtros que se conocen como: filtros de respuesta impulsional finita (FIR) y filtros de respuesta impulsional infinita (IIR). En el caso de los filtros FIR, las muestras de la respuesta impulsional  $h[n]$  se conocen como los coeficientes del filtro. Sin embargo, en el caso de los filtros IIR lo que se conoce como coeficientes del filtro suelen ser las constantes que determinan las ecuaciones recursivas, en forma de diferencias finitas, que caracterizan el comportamiento del filtro.

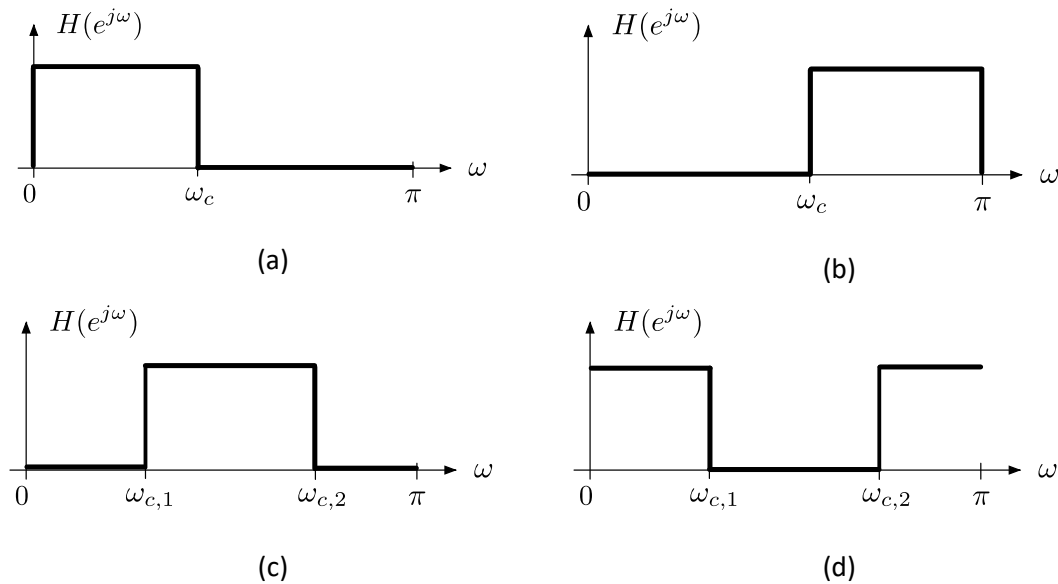
El diseño de filtros digitales es una disciplina bien conocida y en la cual los principales avances fueron llevados a cabo en las últimas dos décadas del siglo XXI, a partir de la aparición de los primeros procesadores digitales de señal (DSP) hacia 1980 (Parks, 1987). El procedimiento para el diseño de filtros suele ser sistemático y se basa en:

1. Determinar las especificaciones que se necesita cumplir.
2. Encontrar un filtro cuya respuesta en frecuencia se aproxime lo máximo posible a las especificaciones.

### 4.1. Especificaciones de un filtro digital

El primer paso en el diseño de un filtro digital consiste en determinar las especificaciones que éste debe cumplir. Ello implica habitualmente, determinar la respuesta en frecuencia que debería tener el filtro, bien en términos de magnitud y fase, bien en forma de parámetros como frecuencias de corte, ancho de banda, nivel en banda de paso, nivel de atenuación fuera de banda, etc. Existen cuatro tipos de respuestas frecuenciales según se trate de un filtro que deja pasar sólo las bajas frecuencias (filtro paso bajo), o el caso inverso en que sólo deje pasar las altas frecuencias (filtro paso alto). De la misma forma, se puede considerar un filtro que deje pasar sólo una banda concreta de frecuencias (filtro paso banda), o el caso inverso en que atenúe dicha banda (filtro banda eliminada). Las respuestas frecuenciales ideales de estos cuatro tipos de filtros se muestran a continuación en la Figura 15.





**Figura 15. Respuesta frecuencial ideal de los cuatro tipos de filtros digitales: (a) paso bajo, (b) paso alto, (c) paso banda, y (d) banda eliminada.**

Todas las respuestas frecuenciales de la Figura 15 se caracterizan por tener una banda de paso a través de la cual se dejan pasar ciertas componentes frecuenciales de la señal a filtrar, y una banda atenuada en donde se atenúan o eliminan ciertas frecuencias. El punto que delimita la banda de paso de la banda atenuada es la frecuencia de corte, indicada según  $\omega_c$  en la Figura 15. En el caso de los filtros paso banda y banda atenuada se define dos frecuencias de corte, una inferior y otra superior indicadas según  $\omega_{c,1}$  y  $\omega_{c,2}$ . Nótese que las respuestas frecuenciales de la Figura 15 son ideales en el sentido de que la transición de la banda de paso a la banda atenuada (o al revés) es instantánea. En la práctica estos cambios abruptos en frecuencia ocasionan respuestas muy lentas en el dominio temporal, haciendo que la longitud del filtro digital sea muy larga (teóricamente infinita) y por tanto dificultando, o haciendo imposible su implementación. Es por ello que, para facilitar la implementación del filtro, se define la transición de la banda de paso a la banda atenuada (o al revés) a través de una región de transición que va desde la denominada frecuencia de paso  $\omega_p$  hasta la frecuencia atenuada  $\omega_a$ , siendo la frecuencia de corte el punto intermedio entre ambas,  $\omega_c = (\omega_p + \omega_a)/2$ . De la misma forma, en lugar de especificar el nivel que presenta la banda de paso y la banda atenuada, se suele especificar una cierta tolerancia de  $\pm\delta_p$  para la banda de paso, respecto un nivel nominal de 1, y  $\pm\delta_a$  para la banda atenuada, tal y como se muestra en la Figura 16. Esta tolerancia cubre el posible rizado que pueda presentar la respuesta frecuencial que se obtenga en la práctica para cumplir con las especificaciones fijadas.

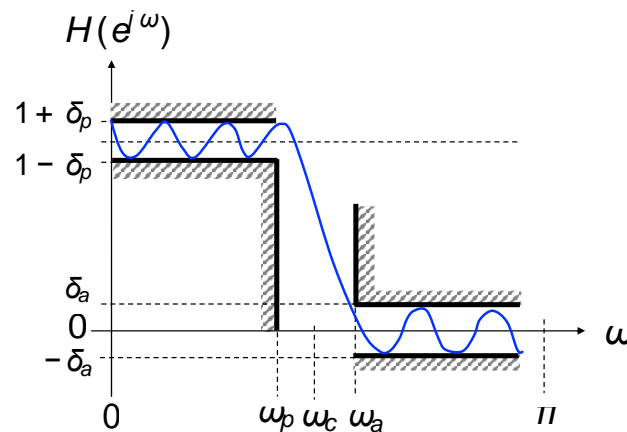


Figura 16. Plantilla de especificaciones de un filtro digital, para el caso de un filtro paso bajo.

Una vez fijadas las especificaciones a cumplir, el diseño del filtro suele implicar una serie de operaciones matemáticas para aproximar el diseño especificado a unas ciertas plantillas, optimizar el número de coeficientes y las prestaciones (en el caso de filtros FIR), o bien el mapeo de las especificaciones a un dominio transformado sobre el cual se determinan los parámetros del filtro (en el caso de filtros IIR). Todas estas operaciones se llevan a cabo hoy en día mediante paquetes de *software* específico como por ejemplo la «*Filter design and analysis tool*» de MATLAB, de la cual se muestra una captura en la Figura 17.

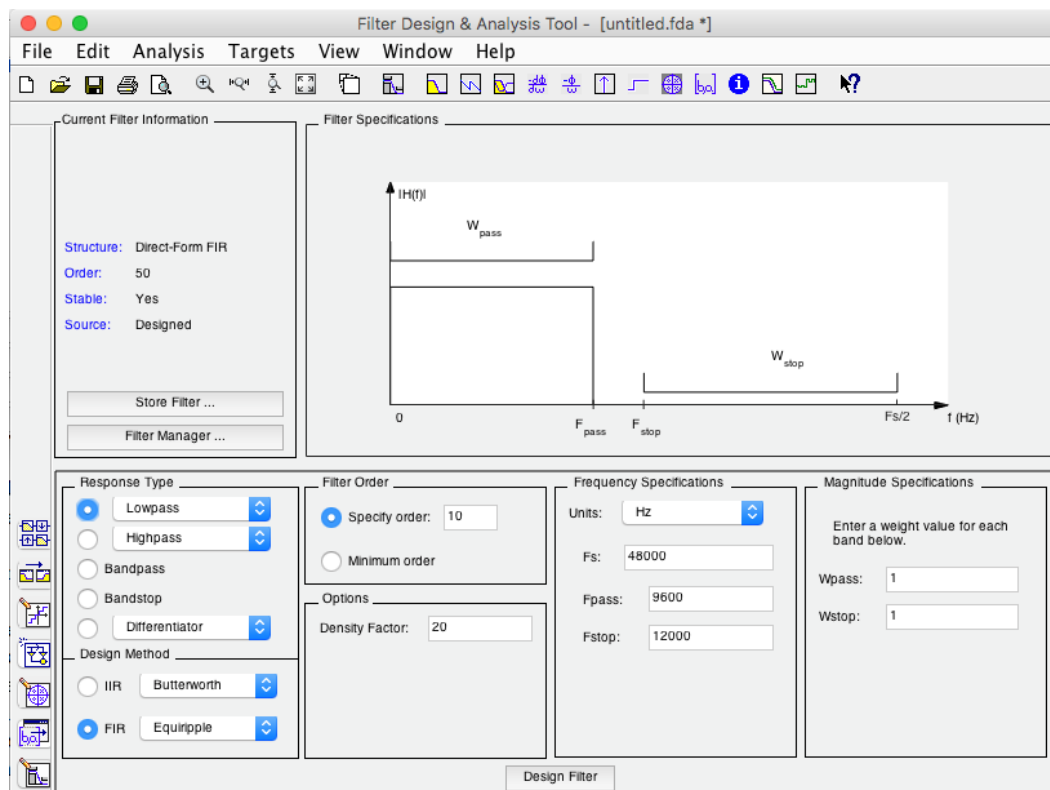


Figura 17. Captura de pantalla de la «*Filter design and analysis tool*» de MATLAB.

A pesar de la existencia de *software* especializado, es importante conocer los fundamentos en que se sustentan para comprender las líneas a seguir en el proceso de diseño de un filtro digital. A continuación, se describen de forma resumida los métodos más habituales para el diseño de

filtros FIR e IIR que cumplan con unas especificaciones pre-determinadas. Información detallada puede encontrarse en diversas referencias especializadas, como por ejemplo (Oppenheim, 1999) y (Karam, 2010).

## 4.2. Diseño de filtros FIR

Los filtros FIR se caracterizan por tener una respuesta frecuencial de tipo polinómica según,

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{L-1} h[n]e^{-j\omega n} \quad (41)$$

y presentan la propiedad de ser siempre filtros estables y sin distorsión de fase. Los métodos existentes para el diseño de filtros FIR se centran en conseguir filtros de fase lineal y respuesta impulsional  $h[n]$  con coeficientes reales. En base a la simetría de estos coeficientes y su longitud, se distingue entre cuatro tipos de filtros FIR diferentes según se indica en la Tabla 1. En dicha tabla se indica además para cada tipo de filtro, el número de ceros  $K$ , la longitud del filtro  $L = K + 1$  en número de coeficientes, el retardo  $\alpha = K/2$  que introduce en muestras y el offset  $\beta$  que presenta la fase lineal de la respuesta del filtro en frecuencia.

		Simetría			
		Par	Impar		
		$h[n] = h[2\alpha - n]$	$h[n] = -h[2\alpha - n]$		
Longitud	Impar	Tipo I	Tipo III		
		Ceros forzados	–	Ceros forzados	$z = \{1, -1\}$ $\omega = \{0, \pi\}$
		$K$	Par	$K$	Par
		$L = K + 1$	Impar	$L = K + 1$	Impar
		$\alpha = K/2$	Entero	$\alpha = K/2$	Entero
	$\beta$	0	$\beta$	$\pi/2$	
	Par	Tipo II	Tipo IV		
		Ceros forzados	$z = -1$ $\omega = \pi$	Ceros forzados	$z = 1$ $\omega = 0$
		$K$	Impar	$K$	Impar
		$L = K + 1$	Par	$L = K + 1$	Par
$\alpha = K/2$		Entero + ½	$\alpha = K/2$	Entero + ½	
$\beta$	0	$\beta$	$\pi/2$		

Tabla 1. Resumen de los cuatro tipos de filtros FIR.

En cuanto al diseño de filtros FIR, a continuación se describen brevemente los métodos más representativos.

#### 4.2.1. Método por muestreo en frecuencia

Suponiendo que tenemos especificada una cierta respuesta en frecuencia  $H(e^{j\omega})$ , una primera opción para obtener un filtro digital que implemente de forma aproximada dicha respuesta es muestrear  $H(e^{j\omega})$  para obtener lo que vendría a ser la DFT de la respuesta impulsional del filtro. Esto es,

$$H[k] = H(e^{j\omega})_{|\omega=2\pi k/L} \quad \text{con } k = 0, 1, \dots, L-1. \quad (42)$$

A continuación, pueden obtenerse los coeficientes del filtro aplicando la IDFT a la respuesta frecuencial que acaba de muestrearse, dando lugar a,

$$h_m[n] = \text{IDFT}_L\{H[k]\}. \quad (43)$$

Los coeficientes en (43) son una manera fácil y sencilla de obtener un filtro FIR que se corresponde exactamente con la respuesta frecuencial que se ha especificado, aunque únicamente en aquellos puntos del eje de frecuencia que han sido muestreados. La desventaja de este método es que para el resto de frecuencias intermedias, la respuesta en frecuencia del filtro FIR queda fuera de nuestro control y puede que no se corresponda exactamente con la respuesta especificada en  $H(e^{j\omega})$ .

#### 4.2.2. Método por enventanado

Otra opción relacionada de alguna forma con la anterior sería, a partir de la respuesta en frecuencia especificada, obtener su correspondencia en tiempo discreto a través de la TFS inversa,

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega. \quad (44)$$

La respuesta impulsional que se obtiene presenta en general una duración infinita, con lo cual es necesario limitarla a un conjunto finito de  $L$  muestras para obtener un filtro FIR. Este truncado se suele llevar a cabo multiplicando  $h[n]$  por  $w[n]$ , una ventana de duración  $L$  muestras. El resultado es la siguiente respuesta impulsional truncada,

$$h_w[n] = h[n]w[n] \quad (45)$$

que obviamente incurrirá en un cierto error en comparación con la respuesta impulsional ideal. Mediante el teorema de Parseval, dicho error puede calcularse equivalentemente tanto en el dominio frecuencial como en el temporal mediante,

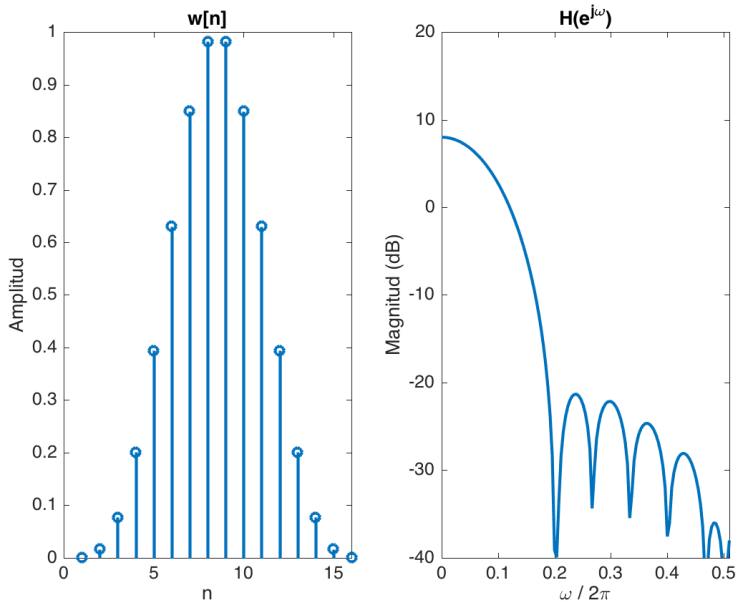
$$\epsilon^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega}) - H_w(e^{j\omega})|^2 d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n] - h_w[n]|^2 \quad (46)$$

expresión que puede utilizarse como función de coste para encontrar la ventana más adecuada. Esto es, aquella ventana que minimice (46). Algunos ejemplos de las ventanas más habituales se muestran a continuación en la Tabla 2.

Por otro lado, es interesante mencionar que debido al enventanado en (45), el filtro FIR que se obtiene presenta una respuesta frecuencial que viene dada por la convolución (periódica  $2\pi$ ) entre la respuesta frecuencial ideal  $H(e^{j\omega})$ , y la transformada de Fourier de la ventana utilizada,  $W(e^{j\omega})$ . Esto es,

$$H_w(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\lambda}) W(e^{j(\omega-\lambda)}) d\lambda \quad (47)$$

Este aspecto ha de ser tenido en cuenta a la hora de evaluar la conveniencia de utilizar una ventana u otra, en función de la respuesta en frecuencia que se obtenga. Para ello es necesario comparar la respuesta frecuencial obtenida con la especificada en origen, y evaluar el error que se está incurriendo a través de (46).

Ventana	Respuesta temporal / frecuencial
<b>Blackman</b> $w[n] = 0.42 - 0.5\cos\left(\frac{2\pi}{L-1}n\right) + 0.08\cos\left(\frac{4\pi}{L-1}n\right)$ , $n = 0, 1, \dots, M-1$ siendo $M = L/2$ para $L$ par y $M = (L+1)/2$ para $L$ impar; los coeficientes correspondientes a $M \leq n \leq L-1$ se obtienen girando los coeficientes para $n = 0, 1, \dots, M-1$ alrededor del punto medio.	
<b>Hamming</b> $w[n] = 0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2\pi}{L-1}n\right)$ , $n = 0, 1, \dots, L-1$	

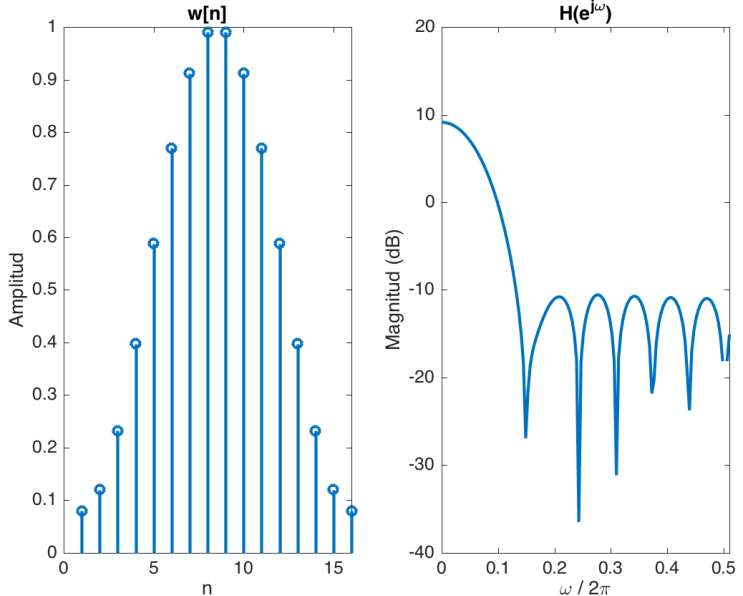
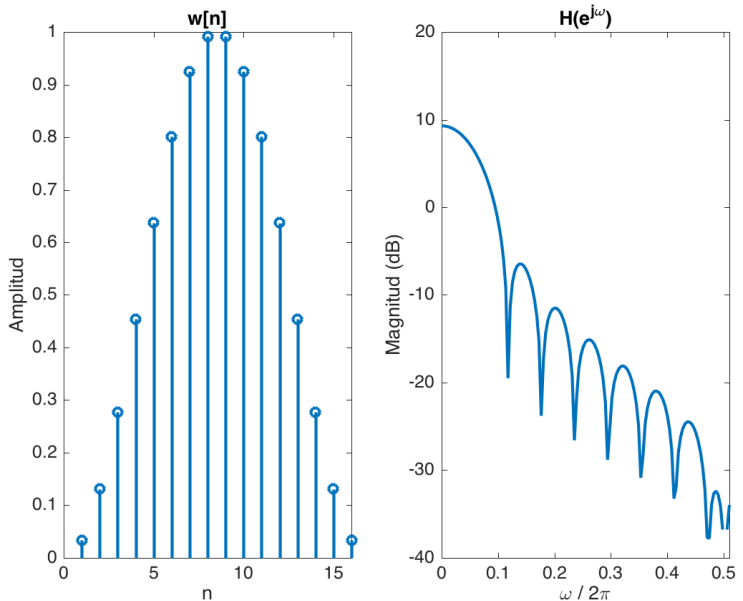
	
<b>Hanning</b> $w[n] = 0.5 \left[ 1 - \cos\left(\frac{2\pi}{L-1}n\right) \right], \quad n = 0, 1, \dots, L-1$	
	

Tabla 2. Ejemplos (con L=16) de ventanas habituales en el diseño de filtros FIR por envanetado.

#### 4.2.3. Método óptimo de rizado constante

Existen métodos que utilizan diferentes criterios de optimalidad para el diseño de filtros FIR, como puede ser por ejemplo la minimización del error cuadrático o del error máximo entre la respuesta frecuencial del filtro FIR y la respuesta especificada (Karam, 2010). De forma similar, también es posible diseñar el filtro FIR de forma que no minimice una función de coste concreta, sino que minimice el nivel de rizado que presenta su respuesta frecuencial. Esto es, de forma que sea lo más plana posible. Finalmente se añaden criterios prácticos como minimizar el número de coeficientes del filtro que son necesarios para una anchura de la banda de transición también mínima.

Estos son criterios cualitativos que a menudo resultan más útiles a nivel práctico que no fijar un cierto valor para el error cuadrático. Para ello, el problema se suele formular a partir de la teoría de la aproximación utilizando una función de coste basada en el error ponderado de Chebyshev. La solución a este problema no es sencilla ni presenta una expresión cerrada, pero puede obtenerse con relativa facilidad utilizando el algoritmo iterativo ideado por Parks y McClellan, cuyos detalles pueden consultarse por ejemplo en (Karam, 2010). El algoritmo tan sólo necesita que se le proporcione cinco parámetros a partir de los cuales encontrará la solución que mejor se ajuste a ellos. Estos son: la longitud deseada del filtro FIR,  $L$ , las frecuencias que delimitan la banda de paso y la banda atenuada,  $\omega_p$  y  $\omega_a$ , así como el error máximo en la banda de paso y en la banda atenuada,  $\delta_p$  y  $\delta_a$ . En definitiva, los parámetros que se muestran en la Figura 16.

Estos cinco parámetros están relacionados de manera que cualquiera de ellos depende de los otros cuatro. En la práctica es habitual especificar los requerimientos de  $\omega_p$ ,  $\omega_a$ ,  $\delta_p$  y  $\delta_a$ , y dar libertad al algoritmo para que encuentre el filtro FIR que mejor cumple con estos requisitos, siendo la salida del algoritmo los coeficientes del filtro FIR y la longitud necesaria. De forma aproximada, la longitud necesaria en el criterio óptimo de rizado constante viene dada por,

$$L \approx \frac{-10 \log_{10}(\delta_p \delta_a) - 13}{14.6 \Delta f} + 1 \quad (48)$$

donde  $\Delta f = (\omega_a - \omega_p)/(2\pi)$  es la anchura de la banda de transición. En general, los filtros FIR diseñados bajo el criterio de rizado constante ofrecen una atenuación (definida como  $-10 \log_{10}(\delta_p \delta_a)$ ) que es del orden de 5 dB superior a la que ofrecen los métodos de diseño de filtros FIR basados en el enventanado para un mismo número de coeficientes.

### 4.3. Diseño de filtros IIR

Los filtros IIR presentan una respuesta impulsional infinita que proviene de un sistema cuya caracterización se lleva a cabo mediante ecuaciones en diferencias finitas, las cuales relacionan entradas y salidas actuales con instantes pasados. Ello hace que la respuesta frecuencial de los filtros IIR sea de tipo racional basada en el cociente de dos polinomios según,

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^P b_k e^{-j\omega k}}{\sum_{k=0}^Q a_k e^{-j\omega k}} \quad (49)$$

donde el orden del filtro IIR viene dado por el orden del denominador,  $Q$ , ya que en la habitualmente  $P < Q$ . El orden del filtro coincide con el número de muestras de salida en instantes anteriores que ha de almacenarse para calcular una nueva muestra a la salida del filtro, siendo los coeficientes  $\{a_k\}_{k=0}^Q$  y  $\{b_k\}_{k=0}^P$  las incógnitas a determinar en el diseño del filtro. Como puede verse, no existe una dependencia lineal entre los coeficientes del filtro y la respuesta frecuencial, lo cual hace más difícil el diseño de filtros IIR en comparación con los FIR.

A pesar de las dificultades, existen métodos analíticos que permiten obtener directamente la respuesta de un filtro IIR deseado para el caso particular de filtros cuya respuesta sea paso bajo. Uno de estos métodos es la llamada transformación bilineal que se describe a continuación.

#### 4.3.1. Método de la transformación bilineal

La transformación bilineal es un método que permite convertir el problema de diseñar un filtro IIR en tiempo discreto cuya función de transferencia es  $H(z)$  en el dominio transformado  $Z$ , en el problema de diseñar un filtro en tiempo continuo (*i.e.* analógico) cuya función de transferencia es  $H_a(s)$  en el dominio de Laplace. De esta forma se aprovecha que para el caso del diseño de filtros analógicos ya existen soluciones bien conocidas. Una vez diseñado el filtro analógico, se realiza la transformación inversa para volver al dominio en tiempo discreto, en donde se asegura que las especificaciones se siguen cumpliendo.

La relación entre ambas funciones de transferencia viene dada por,

$$s = K \left( \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) \quad (50)$$

en donde  $K$  es un parámetro de diseño. La transformación en (50) es además invertible, ya que

$$z^{-1} = \frac{1 - s/K}{1 + s/K} \quad (51)$$

y garantiza la estabilidad del filtro al pasar de uno a otro dominio, puesto que el semiplano izquierdo en el plano- $S$  de la transformada de Laplace queda dentro del círculo unitario al convertir a la representación de la transformada  $Z$ .

Por otro lado, el eje imaginario en el plano- $S$  se mapea directamente sobre el círculo unidad del plano- $Z$ , con lo cual existe una relación directa entre las frecuencias de uno y otro dominio. De hecho, sustituyendo  $s = e^{j\Omega}$  y  $z = e^{j\omega}$  en (50), obtenemos

$$\Omega = K \tan\left(\frac{\omega}{2}\right). \quad (52)$$

Con el resultado en (52) puede verse que la constante  $K$  permite mapear una frecuencia concreta en el dominio analógico a una frecuencia concreta del dominio digital, lo cual es útil para controlar la posición de la frecuencia de corte del filtro.

Finalmente, una vez convertido el problema al dominio analógico, el siguiente paso consiste en seleccionar uno de los filtros analógicos conocidos cuya respuesta frecuencial puede obtenerse de forma analítica. Los cuatro tipos de filtros analógicos más conocidos son Butterworth, Chebyshev, inverso de Chebyshev y elíptico. Sus respuestas en frecuencia se muestran a continuación en la Tabla 3 en donde la atenuación  $\alpha(\Omega)$  se define como,

$$\alpha(\Omega) = -20 \log_{10} H_a(\Omega) \quad (53)$$

y por lo tanto,

$$\alpha_a = -20 \log_{10} \delta_a \quad (54)$$

$$\alpha_p = -20 \log_{10} \frac{1 + \delta_p}{1 - \delta_p}. \quad (55)$$



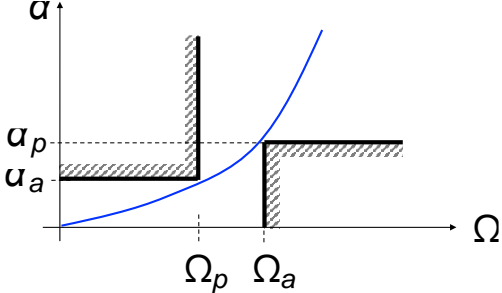
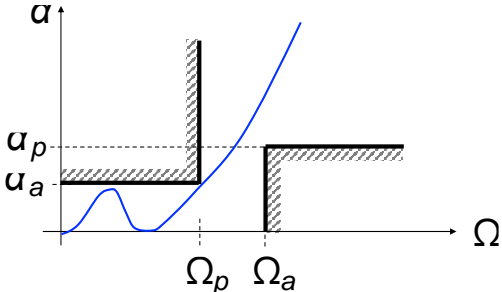
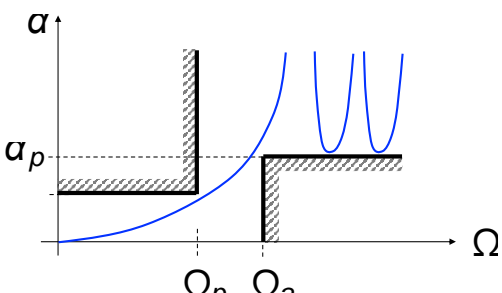
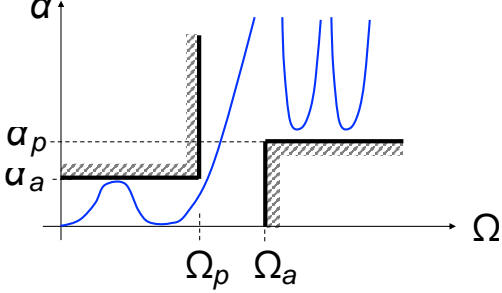
Tipo de filtro	Atenuación del filtro analógico en frecuencia
<p><b>Butterworth</b>, orden <math>N</math>:</p> $ H_a(\Omega) ^2 = \frac{1}{\left 1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}\right ^2}$ <p>Su comportamiento es maximalmente plano en la banda de paso a cambio de una modesta selectividad en frecuencia.</p>	
<p><b>Chebyshev</b>, de polinomio <math>T_N(x)</math>:</p> $ H_a(\Omega) ^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)}$ <p>Presenta rizado constante en la banda de paso y decrece monótonamente en la banda atenuada. El rizado se controla a través de <math>\epsilon</math> resolviendo,</p> $(1 - \delta_p)^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2}.$	
<p><b>Inverso de Chebyshev</b>, de polinomio <math>T_N(x)</math>:</p> $ H_a(\Omega) ^2 = \frac{1}{1 + \left[\epsilon^2 T_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)\right]^{-1}}$ <p>Decrece monótonamente en la banda de paso y presenta rizado constante en la banda atenuada y. El rizado se controla a través de <math>\epsilon</math> resolviendo,</p> $(1 - \delta_p)^2 = \frac{\epsilon^2}{1 + \epsilon^2}.$	
<p><b>Elíptico</b>, de orden <math>N</math></p> $ H_a(\Omega) ^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 E_N^2(\Omega)}$ <p>Presenta rizado constante tanto en la banda atenuada como en la banda de paso y la banda de transición más estrecha de entre todos los filtros con igual banda de paso y banda atenuada. El denominador depende de la función elíptica Jacobiana <math>E_N(\Omega)</math>.</p>	

Tabla 3. Tipos básicos de filtros analógicos y su respuesta en términos de atenuación en frecuencia.

A partir de los cuatro tipos de filtros analógicos descritos anteriormente, el procedimiento para diseñar un filtro IIR mediante la transformación bilineal puede resumirse en los siguientes pasos:

1. Indicar las especificaciones que ha de cumplir la respuesta frecuencial  $H(e^{j\omega})$  del filtro IIR en los términos de la Figura 16 y convertirlas al dominio analógico utilizando (52).
2. Seleccionar el filtro analógico que mejor se ajuste a las especificaciones y asegurar que proporciona una respuesta causal y estable. Para ello, comprobar que los polos de  $|H_a(j\Omega)|^2$  yacen todos en el semiplano izquierdo del plano-S.
3. Obtener la función de transferencia  $H(z)$  del filtro digital aplicando la transformación bilineal a  $H_a(\Omega)$  utilizando (50).
4. Obtener la respuesta en frecuencia  $H(e^{j\omega})$  del filtro digital sustituyendo  $z = e^{j\omega}$ .

#### 4.4. Comparativa entre filtros FIR e IIR

La decisión entre el uso de un filtro FIR o IIR depende de un compromiso entre estabilidad, facilidad de implementación y selectividad en términos de relación entre el nivel de banda de paso y el nivel de banda atenuada.

Por un lado, los filtros FIR permiten diseñar filtros causales y de fase lineal, los cuales son muy importantes en diversas aplicaciones de procesamiento de señal, donde interesa filtrar una banda de frecuencias de la señal de entrada introduciendo la mínima distorsión. Además, los filtros FIR dan lugar a una respuesta impulsional finita que permite implementar la operación de filtrado mediante la convolución, y por tanto beneficiarse de las implementaciones eficientes de filtrado mediante el uso de la FFT y el filtrado en bloques. La sencillez de implementación, sin retroalimentaciones, evita posibles problemas de estabilidad que pueden surgir al cuantificar los coeficientes del filtro a la hora de implementarlo en *hardware*. Como contrapartida, los filtros FIR suelen necesitar muchos coeficientes para conseguir una respuesta frecuencial que sea suficientemente selectiva para ciertas aplicaciones.

En cuanto a los filtros IIR, su diseño es a priori más complejo porque implica una serie de transformaciones para mapear los requisitos del dominio digital al dominio analógico y posteriormente de vuelta al dominio digital. Además, al tratarse de una respuesta frecuencial racional, las raíces del denominador han de escogerse con cuidado para evitar que el filtro resultante sea inestable. No sólo eso, sino que los coeficientes resultantes han de ser analizados también con cuidado para evitar que al redondearlos o cuantificarlos en implementaciones *hardware*, los polos resultantes queden desviados respecto su posición inicial y el filtro se vuelva inestable. Esto hace que el análisis de estabilidad sea un aspecto muy importante en el diseño de filtros IIR. Otra característica de los filtros IIR es que su respuesta impulsional infinita hace imposible el uso del operador convolución. Ello hace que la salida del filtro tenga que calcularse mediante ecuaciones en diferencias finitas, y por tanto realimentando la salida del filtro hacia la entrada. La contrapartida de los filtros IIR es que necesitan muchos menos coeficientes que los filtros FIR para obtener respuestas selectivas en frecuencia, lo cual los hace muy atractivos en implementaciones de baja complejidad.

## 5. Implementación del filtrado en bloques

Como se ha visto en módulos anteriores, una de las propiedades de la transformada de Fourier es que permite implementar de forma muy sencilla la convolución entre dos secuencias, haciendo que dicha operación se convierta en un mero producto en el dominio transformado. Ello hace que la DFT sea muy utilizada en el análisis de sistemas discretos y sobre todo en la implementación de la operación de filtrado con filtros FIR, donde la existencia de algoritmos que implementan la DFT de forma eficiente hace que el proceso de convolución en el dominio frecuencial sea aún más ventajoso (Blahut, 2010).

El filtrado de secuencias mediante la DFT implica utilizar bloques de muestras de tamaño limitado, puesto que número de *bins* de la DFT (y por tanto la complejidad de cálculo) depende del número de muestras que se procesan por bloque. Esto hace que el filtrado de secuencias muy largas tenga que llevarse a cabo segmentando la secuencia de entrada en bloques de tamaño fijo para que puedan ser procesados secuencialmente por la DFT. Además, si lo que se pretende es implementar la convolución lineal entre una secuencia de entrada y la respuesta impulsional de un cierto filtro FIR, interesa evitar el efecto de convolución circular que introduce por defecto la DFT. Para ello existen diversos métodos como el «*overlap-save*» y el «*overlap-add*» que se describen a continuación, y que precisamente tienen como objetivo implementar de forma eficiente la convolución lineal entre bloques de la secuencia de entrada, y la respuesta impulsional de un filtro FIR de  $L$  coeficientes.

### 5.1. Método *overlap-save*

Este método consiste en tomar bloques de longitud  $N = K + L - 1$  muestras de la secuencia de entrada, con típicamente  $K \gg L$ , y donde  $N$  pasa a ser el tamaño de la DFT e IDFT que llevan a cabo la convolución en el dominio de la frecuencia. Interesa por tanto que  $N$  sea potencia de 2 para poder aplicar el algoritmo FFT en el cálculo de la DFT. Dada la respuesta impulsional del filtro FIR de  $L$  coeficientes,  $h(n)$ , se añaden  $K - 1$  ceros a partir del último coeficiente de forma que queda una respuesta impulsional con *zero-padding* hasta un total de  $N$  coeficientes. De esta respuesta impulsional se calcula la DFT de  $N$  puntos,

$$H_N[k] = \text{DFT}_N\{h(0), h(1), \dots, h(L-1), \underbrace{0, \dots, 0}_{K-1}\}. \quad (56)$$

A partir de este punto se va procesando la secuencia de entrada en bloques de  $N$  muestras, para los cuales se calcula su DFT,

$$X_{N,m}[k] = \text{DFT}_N\{x_m(0), x_m(1), \dots, x_m(N-1)\}. \quad (57)$$

con

$$x_m(n) = x(mN + n). \quad (58)$$

A continuación, se multiplican ambas DFT y se lleva a cabo la IDFT del resultado, dando lugar a la secuencia de muestras,

$$y_m(n) = \text{IDFT}_N\{X_{N,m}[k]H_N[k]\}. \quad (59)$$

Puesto que estamos convolucionando un segmento de  $N$  muestras de entrada con un filtro de longitud  $L$ , si se tratara de una convolución lineal, tendríamos una secuencia de salida de longitud  $N + L - 1$ . Sin embargo, la longitud de la secuencia de salida  $y_m(n)$  viene limitada a  $N$ , el tamaño de la IDFT, con lo cual las primeras  $L - 1$  muestras se habrán visto afectadas por el *aliasing* ocasionado por la convolución circular. Estas  $L - 1$  primeras muestras de  $y_m(n)$  hay que descartarlas y quedarse únicamente con las  $K$  muestras a continuación, puesto que son las que coinciden exactamente con el resultado de la convolución lineal. Por lo tanto, por cada bloque de  $N$  muestras de la secuencia de entrada obtenemos tan sólo  $K$  muestras de la secuencia filtrada. Es por ello que para mantener la continuidad de la secuencia de salida y evitar que se pierdan muestras, los bloques de muestras de la secuencia de entrada han de tomarse con un solapamiento de  $L - 1$  muestras entre ellos. Es decir, las  $L - 1$  últimas muestras del bloque  $x_m(n)$  pasan a ser las primeras  $L - 1$  del bloque siguiente  $x_{m+1}(n)$ .

El método *overlap-save* se describe gráficamente en la Figura 18, donde se indica claramente las muestras que se solapan entre bloques consecutivos de muestras de entrada, y cómo el procedimiento comienza inicializando la secuencia de entrada con  $L - 1$  ceros para el primer bloque.

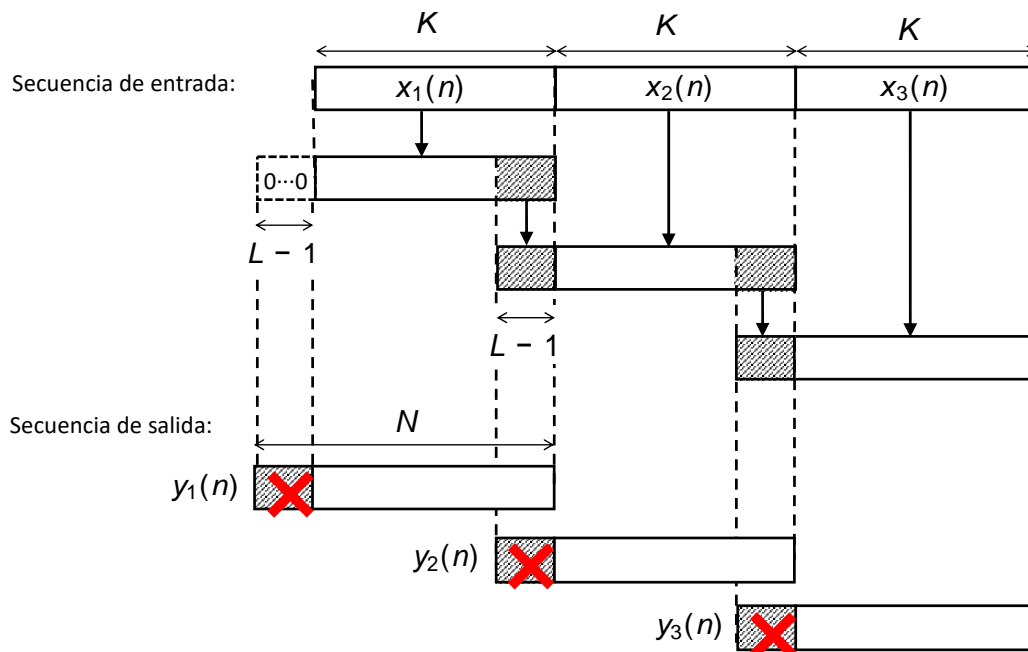


Figura 18. Ilustración gráfica de la operación de convolución por bloques utilizando el método *overlap-save*.

## 5.2. Método *overlap-add*

A diferencia del método anterior, el método *overlap-add* evita el efecto de *aliasing* que aparece al filtrar bloques consecutivos de la secuencia de entrada, ya que procesa bloques de tamaño  $K$

mientras que el tamaño de la DFT e IDFT ya tiene en cuenta la longitud del filtro de  $L$  coeficientes, y es precisamente de  $N = K + L - 1$  puntos. Esto es, la longitud que tendría la secuencia de salida al convolucionar linealmente un bloque de  $K$  muestras con un filtro de  $L$  coeficientes. Para ello es necesario añadir  $L - 1$  zeros a cada bloque de  $K$  muestras que se procesa, y del que se calcula su DFT de  $N$  puntos según,

$$X'_{N,m}[k] = \text{DFT}_N\{x_m(0), x_m(1), \dots, x_m(K-1), \underbrace{0, \dots, 0}_{L-1}\}. \quad (60)$$

A continuación, se multiplica la DFT del bloque de entrada con la DFT del filtro y se lleva a cabo la IDFT, dando lugar a la secuencia de muestras,

$$y'_m(n) = \text{IDFT}_N\{X'_{N,m}[k]H_N[k]\}. \quad (61)$$

Puesto que se ha evitado el efecto de *aliasing*, todas las  $N$  muestras de este bloque de salida son útiles y no hay que descartar ninguna. Estas muestras de salida se corresponden con las muestras  $x_m(n)$  de un cierto bloque de entrada de  $K$  muestras, con lo cual para procesar el siguiente bloque  $x_{m+1}(n)$  hay que desplazarse  $K$  muestras hacia delante. Sobre estas nuevas  $K$  muestras el procedimiento es similar al descrito anteriormente. Esto es, añadir  $L - 1$  ceros al nuevo bloque de muestras según (60), calcular la DFT del bloque, multiplicar por la DFT de los coeficientes del filtro y hacer la IDFT para volver al dominio temporal. Como resultado se obtiene el bloque de muestras de salida  $y'_{m+1}(n)$  cuyas  $L - 1$  primeras muestras han de sumarse a las  $L - 1$  últimas muestras del bloque  $y'_m(n)$  anterior, para así garantizar la continuidad de la señal de salida, tal y como se indica gráficamente en la Figura 19.

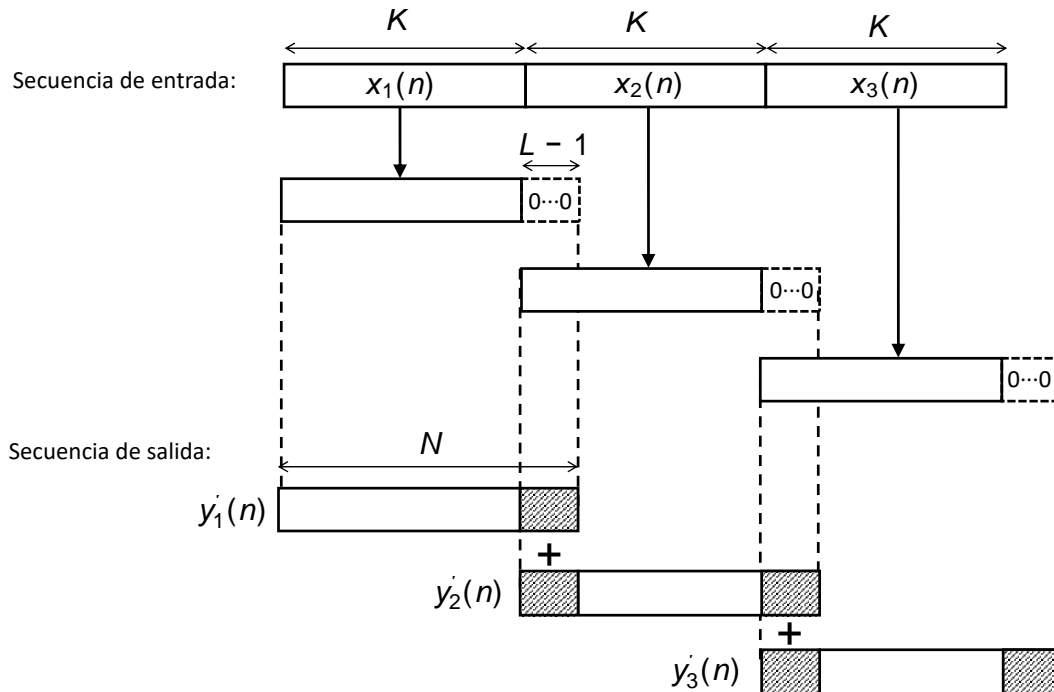


Figura 19. Ilustración gráfica de la operación de convolución por bloques utilizando el método *overlap-add*.

## Resumen

En este módulo se han presentado las operaciones fundamentales para llevar a cabo el tratamiento digital de una señal analógica. En primer lugar, se ha motivado la necesidad de llevar a cabo el tratamiento digital de señales analógicas, así como la equivalencia con el caso en que el tratamiento se hubiera llevado a cabo directamente en el dominio analógico. Las condiciones que resumen dicha equivalencia se han presentado en la Sección 1. Por otro lado, en esta misma sección se ha presentado cómo el tratamiento digital de señales analógicas está formado en realidad por tres pasos, los cuales consisten en la conversión analógico-digital (A/D), el propio tratamiento digital de la señal analógica convertida al dominio del tiempo discreto, y finalmente la conversión digital-analógico (D/A) para devolver el resultado al dominio analógico inicial.

En la Sección 2, se han presentado en detalle las operaciones de conversión A/D y de conversión D/A, y se ha discutido acerca de las diferencias y similitudes entre conceptos aparentemente equivalentes como son «señal digital» o «señal en tiempo discreto», así como «señal analógica» y «señal en tiempo continuo». En esta misma, se han desarrollado varios ejemplos prácticos para comprender mejor las implicaciones de las operaciones de conversión A/D y D/A, así como el impacto de la frecuencia de muestreo sobre el resultado final.

Una vez una señal analógica ya ha sido muestreada, puede ser necesario ajustar su frecuencia de muestreo. Por ejemplo, en sistemas FDMA donde los usuarios están multiplexados en frecuencia y, por lo tanto, el ancho de banda de un usuario concreto es mucho menor que el ancho de banda de toda la señal FDMA que ha sido muestreada por el receptor. A medida que la señal FDMA se va procesando en el receptor para extraer la señal de ese usuario concreto, la frecuencia de muestreo puede irse reduciendo gradualmente hasta quedar en un valor que se ajuste mejor al ancho de banda real de ese usuario. Como se ha visto en la Sección 2, la frecuencia de muestreo es proporcional al ancho de banda y, por tanto, a medida que se reduce el ancho de banda de interés, también puede hacerlo en la misma medida la frecuencia de muestreo. En la Sección 3 se ha adentrado en este problema y se han presentado las operaciones de cambio de frecuencia de muestreo: el diezmado y la interpolación.

A continuación, en la Sección 4 se han presentado los fundamentos básicos para el diseño de filtros digitales. Lejos de ser una descripción detallada, se han introducido los conceptos fundamentales para poder diseñar un filtro digital y así poder tratar digitalmente una señal analógica en base a unos requisitos mínimos. Finalmente, en la Sección 5 se han introducido los dos métodos más relevantes para implementar la operación de filtrado de forma eficiente en el dominio discreto, cuando la señal de entrada es de longitud infinita o simplemente de longitud demasiado grande como para poder implementar la convolución. Este suele ser el caso en señales que se transmiten de forma continua como las señales de radio, televisión o de sistemas de posicionamiento por satélite como GPS. En este caso, la operación de filtrado se implementa por bloques utilizando la FFT, y en esta sección se han presentado varios ejemplos gráficos para ilustrar el funcionamiento de estos métodos.

## Ejercicios de autoevaluación

1. Indique qué afirmación es correcta:
  - (a) La conversión A/D es siempre una operación invertible.
  - (b) La conversión de tiempo continuo a tiempo discreto es siempre invertible.
  - (c) La conversión A/D de una senoide puede dar lugar a una señal todo ceros.
  - (d) Una señal digital es una señal en tiempo discreto.
2. Indique qué afirmación es correcta:
  - (a) La cuantificación es un proceso lineal sin pérdidas.
  - (b) La cuantificación es un proceso no lineal sin pérdidas.
  - (c) La cuantificación es un proceso lineal con pérdidas.
  - (d) La cuantificación es un proceso no lineal con pérdidas.
3. Indique qué afirmación es correcta:
  - (a) La conversión D/A requiere de un filtro *anti-aliasing*.
  - (b) La conversión D/A requiere de un filtro interpolador.
  - (c) La conversión D/A requiere de un filtro paso banda.
  - (d) La conversión D/A requiere de un filtro suave en el dominio frecuencial.
4. El muestreo natural ocasiona que la transformada de Fourier de la señal muestreada sea:
  - (a)  $X_m(\Omega) = \frac{1}{T_m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\Omega - n \frac{2\pi}{T_m}\right)$ .
  - (b)  $X_m(\Omega) = \frac{1}{T_m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tau \text{sinc}\left(\frac{\tau}{T_m} n\right) X\left(\Omega - n \frac{2\pi}{T_m}\right)$ .
  - (c)  $X_m(\Omega) = \frac{1}{T_m} \tau \text{sinc}\left(\frac{\tau \Omega}{2\pi}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\Omega - n \frac{2\pi}{T_m}\right)$ .
  - (d)  $X_m(\Omega) = \frac{1}{T_m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tau \text{sinc}\left(\frac{\Omega - n \frac{2\pi}{T_m}}{2\pi/\tau}\right) X\left(\Omega - n \frac{2\pi}{T_m}\right)$ .
5. No es necesario ecualizar el muestreo basado en *sample & hold* cuando:
  - (a)  $\tau \ll T_m$ .
  - (b)  $\tau \approx T_m$ .
  - (c)  $\tau \gg T_m$ .
  - (d) Ninguna de las anteriores.
6. ¿Qué frecuencia de muestreo es conveniente utilizar con la señal  $x(t) = \sin(2\pi 50t)$ ?
  - (a)  $F_m = 100$  Hz.
  - (b)  $F_m = 50$  Hz.
  - (c)  $F_m = 150$  Hz.
  - (d)  $F_m = 25$  Hz.
7. En el proceso de conversión D/A es necesario eliminar las réplicas de la transformada de Fourier de la señal muestreada que se encuentran a:
  - (a)  $|f| > F_m$ .

- (b)  $|f| > F_m/2$ .
  - (c)  $|f| > 2F_m$ .
  - (d)  $|f| < 2F_m$ .
8. Una señal paso banda de 20 MHz de ancho de banda está centrada a  $F_{IF} = 70$  MHz. Dicha señal se muestrea mediante la técnica de muestreo IF. ¿A cuál de estas frecuencias aparece una réplica de su transformada de Fourier?
- (a) 14 MHz.
  - (b) 35 MHz.
  - (c) 30 MHz.
  - (d) 40 MHz.
9. Indique qué afirmación es correcta:
- (a) Un cuantificador *mid-rise* presenta un nivel de cuantificación igual a cero.
  - (b) Un cuantificador *mid-tread* presenta el mismo número de niveles de cuantificación positivos como negativos.
  - (c) Un cuantificador *mid-rise* es más adecuado para cuantificar señales que presentan pequeñas oscilaciones alrededor del cero.
  - (d) Ninguna de las anteriores.
10. Para mejorar la relación potencia de señal a potencia de ruido de cuantificación, interesa:
- (a) Que aumente la potencia de la señal, para poder cuantificarla mejor.
  - (b) Aumentar el margen dinámico para poder capturar bien la señal de entrada, manteniendo fijo el número de bits.
  - (c) Aumentar el número de bits a la vez que se aumenta el margen dinámico.
  - (d) Aumentar el número de bits manteniendo fijo el margen dinámico.
11. Sea la señal  $x[n] = \sin(\omega_0 n)$  con  $\omega_0 = 0.8\pi/3$ . Si aplicamos un diezmado con filtro *anti-aliasing* a esta señal por un factor  $M = 3$ , la transformada de Fourier de la señal resultante presenta,
- (a) Una delta en la frecuencia  $\omega'_0 = 0.8\pi$ .
  - (b) Una delta en la frecuencia  $\omega'_0 = 0.8\pi/9$ .
  - (c) Una delta en la frecuencia  $\omega'_0 = 0.8\pi$  y otra delta en la frecuencia  $\omega'_0 = 1.2\pi$ .
  - (d) Una delta en la frecuencia  $\omega'_0 = 0.8\pi/9$  y otra delta en la frecuencia  $\omega'_0 = 2\pi - 0.8\pi/9$ .
12. Sea la señal  $x[n] = \sin(\omega_0 n)$  con  $\omega_0 = 1.2\pi/3$ . Si aplicamos un diezmado sin filtro *anti-aliasing* a esta señal por un factor  $M = 3$ , la transformada de Fourier de la señal resultante presenta,
- (a) Una delta en la frecuencia  $\omega'_0 = 1.2\pi$ .
  - (b) Una delta en la frecuencia  $\omega'_0 = 1.2\pi/9$ .
  - (c) Una delta en la frecuencia  $\omega'_0 = 0.8\pi$ .
  - (d) Una delta en la frecuencia  $\omega'_0 = 0.8\pi$  y otra delta en la frecuencia  $\omega'_0 = 1.2\pi$ .
13. Sea la señal  $x[n] = \sin(\omega_0 n)$  con  $\omega_0 = 0.8\pi/3$ . Si interpolamos esta señal por un factor  $L = 3$ , la transformada de Fourier de la señal resultante presenta,



- (a) Una delta en la frecuencia  $\omega'_0 = 0.8\pi$ .
  - (b) Una delta en la frecuencia  $\omega'_0 = 0.8\pi/9$ .
  - (c) Una delta en la frecuencia  $\omega'_0 = 0.8\pi$  y otra delta en la frecuencia  $\omega'_0 = 1.2\pi$ .
  - (d) Una delta en la frecuencia  $\omega'_0 = 0.8\pi/9$  y otra delta en la frecuencia  $\omega'_0 = 2\pi - 0.8\pi/9$ .
14. Sea la señal  $x[n] = \sin(\omega_0 n)$  con  $\omega_0 = 0.8\pi/3$ . Si aplicamos un cambio de frecuencia por un factor  $3/2$ , ¿qué afirmaciones son ciertas?
- (a) Es necesario implementar un filtro paso bajo con frecuencia de corte  $\omega_c = \pi/2$ .
  - (b) Es necesario implementar un filtro paso bajo con frecuencia de corte  $\omega_c = \pi/3$ .
  - (c) La transformada de Fourier de la señal resultante presenta una delta en la frecuencia  $\omega'_0 = 1.6\pi/9$  y otra delta en la frecuencia  $\omega'_0 = 16.4\pi/9$ .
  - (d) La transformada de Fourier de la señal resultante presenta una delta en la frecuencia  $\omega'_0 = 0.4\pi$  y otra delta en la frecuencia  $\omega'_0 = 1.6\pi$ .
15. Se necesita implementar un filtro FIR y se quiere que la señal de salida presente un retardo entero de muestras y un offset de fase nulo. ¿Qué tipo de filtro FIR hay que implementar?
- (a) Tipo I.
  - (b) Tipo II.
  - (c) Tipo III.
  - (d) Tipo IV.
16. En relación al diseño de filtros FIR e IIR, indique qué afirmaciones son ciertas:
- (a) Los filtros FIR suelen requerir menos coeficientes que los filtros IIR para implementar respuestas selectivas en frecuencia.
  - (b) Los filtros FIR son siempre causales y de fase lineal.
  - (c) Los filtros IIR dan lugar a implementaciones de filtrado en bloque más eficientes, gracias al uso de la FFT.
  - (d) Los filtros FIR obtenidos mediante el método rizado constante tienen como desventaja que su atenuación es del orden de 5 dB peor que los filtros FIR obtenidos por enventanado.
17. En relación al diseño de filtros IIR, indique qué afirmaciones son ciertas:
- (a) Los filtros de Butterworth presentan un comportamiento plano en la banda de paso y una gran selectividad en frecuencia.
  - (b) Los filtros de Chebyshev decrecen monótonamente en la banda de paso y presentan rizado constante en la banda atenuada.
  - (c) Los filtros inversos de Chebyshev presentan rizado constante en la banda de paso y decrecen monótonamente en la banda atenuada.
  - (d) Los filtros elípticos presentan rizado constante tanto en la banda de paso como en la banda atenuada.
18. Indique la expresión correcta de la transformación bilineal para el diseño de filtros IIR:
- (a)  $s = K \left( \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)$ .
  - (b)  $s = K \left( \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \right)$ .

(c)  $z^{-1} = K \left( \frac{1-s^{-1}}{1+s^{-1}} \right).$

(d)  $z^{-1} = \frac{1+s/K}{1-s/K}.$

## Soluciones

1. La respuesta correcta es la **(c)**, ya que tal como se ha comentado en el capítulo, en caso de muestrear  $\sin(\Omega_0 t)$  exactamente a la frecuencia de Nyquist da lugar a una señal todo ceros.
2. La respuesta correcta es la **(d)**.
3. La respuesta correcta es la **(b)**.
4. La respuesta correcta es la **(b)**.
5. La respuesta correcta es la **(a)**.
6. La respuesta correcta es la **(c)**, ya que garantiza que se cumple el teorema del muestreo a la vez que resulta en una secuencia discreta diferente de cero.
7. La respuesta correcta es la **(b)**, ya que el filtro interpolador es un filtro paso ideal de ancho de banda  $F_m/2$ .
8. La respuesta correcta es la **(a)**, de acuerdo con la fórmula de la frecuencia de muestreo IF mostrada en (22).
9. La respuesta correcta es la **(c)**, ya que el cuantificador *mid-rise* se adapta mejor a señales con pequeñas oscilaciones de su amplitud alrededor del cero (*i.e.*  $|x(t)| < \frac{\Delta}{2}$ ), al disponer de dos niveles de cuantificación en esa zona:  $\{-\frac{\Delta}{2}, +\frac{\Delta}{2}\}$ . El cuantificador *mid-tread* sin embargo, ofrecería siempre un valor igual a cero a su salida independientemente de la señal de entrada.
10. La respuesta correcta es la **(d)**, de acuerdo con la fórmula de la relación potencia de señal a potencia de ruido de cuantificación mostrada en (32).
11. La respuesta correcta es la **(c)**.
12. La respuesta correcta es la **(d)**.
13. La respuesta correcta es la **(d)**.
14. Las respuestas correctas son la **(b)** y la **(c)**.
15. La respuesta correcta es la **(a)**.
16. La respuesta correcta es la **(b)**.
17. La respuesta correcta es la **(d)**.
18. La respuesta correcta es la **(a)**.

## Bibliografía

Blahut, R. E. (2010), *Fast Algorithms for Signal Processing*, Cambridge University Press.

Karam, L. J., McClellan, J. H., Selesnick, I. W., Sidney, C. (2010). *Digital Signal Processing Fundamentals*, Ch. 11 Digital filtering, *The Digital Signal Processing Handbook* (2<sup>nd</sup> ed.), CRC Press.

Oppenheim, A. V., Schafer, R. W., & Buck, J. R. (1999). *Discrete-Time Signal Processing* (2nd ed.). Prentice Hall, Signal Processing Series.

Oppenheim, A. V., Willsky, A. S., & Nawab, S. H. (1996). *Signals & Systems* (2nd ed.). Prentice Hall, Signal Processing Series.

Palm III, W. J. (2010). *Introduction to MATLAB for Engineers* (3rd ed.). McGraw-Hill.

Proakis, J. G., & Manolakis, D. G. (2007). *Digital Signal Processing* (4th ed.). Prentice Hall.

Parks, T. W., Burrus, C. S. (1987), *Digital Filter Design*, John Wiley & Sons.